

TRAITÉ ANALYTIQUE DES SECTIONS CONIQUES ET DE LEUR USAGE

POUR LA RESOLUTION DES EQUATIONS dans les Problêmes tant déterminez qu'indéterminez.

OUVRAGE POSTHUME

De M. LE MARQUIS DE L'HÔPITAL, *Academicien Honoraire de l'Academie Royale des Sciences.*

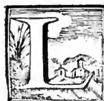


A VENISE,
CHEZ FRANÇOIS PITTERI.

MDCCXL.
AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE.



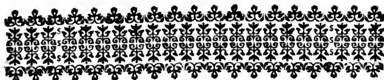
AVERTISSEMENT
DU LIBRAIRE.



L'Illuſtre & ſçavant Auteur de cet Ouvrage étoit ſur le point de le donner au Public, lorſqu'il mourut en 1704. âgé de quarante-trois ans : Le Manuſcrit en étoit ſans Preface, que ce ſeul Auteur pouvoit bien faire: c'eſt pour cela qu'il ne s'en trouve point ici. Mais le titre doit ſuffire aux Connoiſſeurs, pour juger de quelle conſequence eſt en Géometrie la Matiere de ce Livre. La grande réputation de M. le Marquis de l'Hôpital en ce genre d'Etude, répond autant, ce me ſemble, de l'habileté avec laquelle cette matiere eſt traitée, que du ſuccés qu'on doit attendre de l'Ouvrage. C'eſt ce qui m'a déterminé à l'imprimer tel qu'il étoit, ſans autre ſoin que de faire enſorte qu'il le fût le plus correctement qu'il me ſeroit poſſible, en cherchant quelque habile Géometre, qui voulût bien veiller à l'impreſſion. La conſideration & l'eſtime des Sçavans pour l'Auteur, m'en ont fait heureuſement trouver deux celebres. C'eſt par leurs ſoins que pour répondre à l'empreſſement d'un trés-grand nombre de Mathematiciens pour cet Ouvrage, & ſur tout

les jeunes Geometres, qui le regardoient comme devant leur faciliter l'entrée à la sublime *Analyse des Infiniment petits*, je le publie avec toute la confiance possible, quoique denué de la Preface que la maladie de l'un de ces deux Geometres, & les grandes occupations de l'autre, ne leur ont pas permis de faire; & je me persuade que les Lecteurs contens du fond de l'Ouvrage, ne le seront pas moins de son execution, tant pour la beauté du papier & du caractere, que pour l'exactitude.



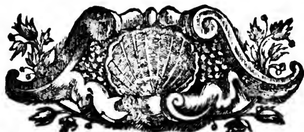


TABLE

LIVRE HUITIE'ME.

LIVRE NEUVIE'ME.

LIVRE DIXIE'ME.



TRAITÉ ANALYTIQUE
DES SECTIONS CONIQUES,

Et de leur usage pour la Resolution des Equations dans les Problêmes tant déterminés qu'indéterminés.

LIVRE PREMIER.

De la Parabole.

DÉFINITIONS.

I.



YANT placé ſur un plan une Regle *BC*, & une équerre *GDO*, en ſorte que l'un de ſes côtés *DG* ſoit couché le long de cette regle, on prendra un fil *FMO* égal en longueur à l'autre côté *DO* de cette équerre, duquel l'on attachera un bout à l'extremité *O* de ce côté *DO*, & l'autre bout en un point quelconque *F* pris ſur ce plan du même côté de l'équerre par rapport à la regle. Maintenant ſi l'on fait gliſſer le côté *DG* de l'équerre le long de la regle *BC*, & qu'en même temps l'on ſe ſerve d'un ſtile *M* pour tenir toujours le fil tendu, & ſa partie *MO* toute jointe & comme collée contre le côté *OD* de l'équerre ; la courbe *AMX* que le ſtyle *M* décrit dans ce mouvement, eſt une portion de Parabole. Fig. I.

Si l'on renverſe l'équerre de l'autre côté du point fixe *F*,

on décrira en la même façon l'autre portion *AMZ* de la même Parabole; de sorte que la ligne *XAZ* ne sera qu'une même courbe qu'on appelle *Parabole*.

2.

La ligne *BC* dans laquelle le bord inferieur de la regle immobile *BC* touche le plan & le côté *DG* de l'équerre *GDO*, est appellée *Directrice*.

3.

Le point fixe *F* du plan, est nommé le *Foyer* de la Parabole.

4.

Si l'on mene du point fixe *F*, sur la directrice *BC* une perpendiculaire *FE* qui rencontre la parabole au point *A*; la ligne *AF* indéfiniment prolongée du côté de *F*, est appellée l'*Axe* de la parabole.

5.

La ligne *p* quadruple de *AF*, est appellée *Parametre* de l'axe.

6.

Toutes les lignes comme *MP* menées des points de la parabole perpendiculairement à l'axe, sont appellées *Ordonnées* à l'axe.

7.

Toutes les lignes comme *MO* menées des points de la parabole parallelement à l'axe, en sont les *Diametres*.

8.

Une ligne droite qui ne rencontre la parabole qu'en un point, & qui étant continuée de part & d'autre n'entre point dedans, mais tombe au dehors, est appellée *Tangente* en ce point.

COROLLAIRE I.

1. Il suit de la définition de la Parabole, que si l'on tire par un de ses points quelconques *M* au foyer *F* une ligne droite *MF*, & sur la directrice *BC* une perpendiculaire *MD*; les droites *MF*, *MD*, seront toujours égales entre elles. Car si l'on re-
* *Def. 1.* tranche du côté *OD* de l'équerre & du fil *OMF* qui * lui est égal, la partie commune *OM*, il est visible que les parties restantes *MD*, *MF*, seront toujours égales entre elles.

COROLLAIRE II.

2. DE LA il eſt évident, que ſi l'on mene une ligne droite quelconque *KK* parallele à la directrice *BC*, & que d'un point quelconque *M* de la parabole, on tire ſur cette ligne la perpendiculaire *MK*, & au foyer la droite *MF*; la difference ou la ſomme *KD* des deux droites *MF*, *MK*, ſera toujours la même : ſçavoir la difference lorſque le point *M* tombe au deſſous de *KK*, & la ſomme lorſqu'il tombe au deſſus.

COROLLAIRE III.

3. IL eſt évident que *FE* eſt diviſée en deux parties égales par la parabole au point *A*. Car ſuppoſant que le point *M* tombe au point *A*, la ligne *MF* tombe ſur *AF*, & la ligne *MD* ſur *AE*, qui ſeront par conſequent égales entre elles; puiſque *MF* eſt toujours * égale à *MD*, en quelque endroit de la parabole que tombe le point *M*. * Art. 1.

COROLLAIRE IV.

4. DE LA on voit comment on peut décrire une parabole *XAZ*, l'axe *AP* dont le point *A* eſt l'origine étant donné, avec ſon parametre p. Car ayant pris ſur l'axe *AP* de part & d'autre du point *A* les parties *AF*, *AE* égales chacune au quart de ſon parametre p, & mené par le point *E* la perpendiculaire indéfinie *BC* ſur *FE*; ſi l'on couche le bord inferieur d'une regle ſur cette ligne *BC* qui ſert de directrice, & que par le moyen d'une équerre *ODG*, & d'un fil *FMO* égal au côté *OD*, & attaché par l'un de ſes bouts au foyer *F*, & par l'autre bout à l'extremité *O* de ce même côté, l'on décrive une Parabole *XAZ* comme l'on a enſeigné dans la definition premiere, il eſt viſible qu'elle ſera celle qu'on demande.

Il n'eſt pas moins viſible que plus le côté *OD* de l'équerre & le fil *OMF* (qui * lui doit être égal) ſera long, plus auſſi la portion de la parabole qu'on décrira ſera grande ; de ſorte qu'on la peut augmenter autant que l'on voudra, en augmentant également le côté *OD* de l'équerre & le fil *OMF*. * Def. 1.

COROLLAIRE V.

5. Si d'un point quelconque M de la Parabole l'on mene une ordonnée MP à l'axe, & au foyer F la droite MF; il est clair que cette ligne $MF = AP + AF$, puisque $MF =$ * Art. 3. $MD = AP + AE$, & que * $AF = AE$.

PROPOSITION I.

Theorême.

6. Fig. I. *Le quarré d'une ordonnée quelconque* MP *à l'axe* AP, *est égal au rectangle du parametre* p, *par la partie* AP *de l'axe prise entre son origine* A *& la rencontre* P *de l'ordonnée.*

Il faut prouver que $\overline{MP}^2 = p \times AP$.

Ayant nommé la donnée AF, m; & les indéterminées AP, * Art. 5. x; PM, y; on aura $MF = * m + x$, & $PF = x - m$ ou $m - x$, selon que le point p se trouve au dessous ou au dessus du foyer F. Or le triangle rectangle MPF donne en l'un & l'autre cas $\overline{MF}^2$ $(mm + 2mx + xx) = \overline{MP}^2$ (yy) $+ \overline{PF}^2$ $(mm - 2mx + xx)$; d'où l'on tire $4mx = yy$. Donc puisque selon la 5° definition $p = 4m$, on aura aussi $yy = px$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE PREMIER ET FONDAMENTAL.

7. Fig. II. Il est donc évident que si l'on nomme p le parametre de l'axe AP; chacune de ses parties AP, x; & chacune de ses ordonnées correspondantes PM, y; on aura toujours $yy = px$. Or comme cette proprieté convient à tous les points de la parabole, & en détermine la position par rapport à son axe AP; il s'ensuit que l'équation $yy = px$ exprime parfaitement la nature de la parabole par rapport à son axe.

COROLLAIRE II.

8. Fig. II. Si l'on mene deux ordonnées quelconques MP, NQ à l'axe AP, leurs quarrés seront entr'eux comme les parties AP & AQ de l'axe, prises entre son origine A & les rencontres P & * Art. 6. 7. Q de ces mêmes ordonnées. Car * $\overline{PM}^2 . \overline{QN}^2 :: p \times AP . p \times AQ :: AP . AQ$.

COROLLAIRE III.

9. Si l'on mene par un point quelconque P de l'axe AP une parallele MPM à ses ordonnées; elle rencontrera la parabole en deux points M & M également éloignés de part & d'autre du point P, & non en davantage. Car afin que les points M & M soient à la parabole, il faut * que les quarrés de chaque PM (y) prise de part & d'autre du point P, soient égaux chacun au même rectangle px. * Art. 7.

COROLLAIRE IV.

10. Il suit de ce que * $yy = px$, que plus AP (x) est grande, plus aussi l'ordonnée PM (y) prise de part & d'autre de l'axe AP augmente, & cela à l'infini; & qu'au contraire plus AP (x) diminué, plus aussi l'ordonnée PM (y) devient petite: de sorte que AP (x) étant nulle ou zero, chaque PM (y) prise de part & d'autre de l'axe AP devient aussi nulle; c'est-à dire que le point P tombant en A, les deux points de rencontre M & M se réunissent en ce point. D'où il est clair. * Art. 7.

1°. Que si l'on mene par l'origine A de l'axe une ligne LL parallele à ses ordonnées, elle sera tangente en A.

2°. Que la Parabole s'éloigne de part & d'autre de plus en plus à l'infini de son axe AP à commencer par son origine A; & qu'ainsi toute parallele comme LM à l'axe AP, ne rencontre la Parabole qu'en un seul point M, & passe au dedans, puisque sa distance de l'axe demeure partout la même.

COROLLAIRE V.

11. Si d'un point quelconque M de la Parabole l'on tire une parallele ML à l'axe AP, laquelle rencontre en L la parallele AL à ses ordonnées; il est clair en menant l'ordonnée MP, que $AL = PM\,(y)$, & que $ML = AP\,(x) = \frac{yy}{p}$, puisque * $px = yy$. D'où il suit que les droites ML $(\frac{yy}{p})$, ML $(\frac{yy}{p})$ prises de part & d'autre de l'axe AP sont égales entr'elles, lorsque les points L, L sont également éloignés du point A; & partant que si une ligne quelconque MM terminée par la parabole est coupée en deux parties égales par l'axe en P, elle sera parallele à la ligne LL, c'est à dire qu'elle sera ordon- * Art. 7.

née de part & d'autre à l'axe. Car ayant mené les paralleles *ML*, *ML* à l'axe *AP*, il est évident que *LL* sera divisée par le milieu en *A*, puisque *MM* l'est en *P*. Les droites *ML*, *ML*, seront donc égales entr'elles comme on vient de le prouver; & par consequent la ligne *MM* sera parallele à *LL*.

COROLLAIRE VI.

12. IL suit de ce que toutes les perpendiculaires *MPM* à l'axe *AP*, terminées de part & d'autre par la parabole, sont * coupées par le milieu en *P*; que l'axe divise la parabole en deux portions entierement égales & semblablement posées de part & d'autre. Car si le plan sur lequel elle est tracée, étoit plié le long de l'axe ensorte que les deux parties se joignissent, il est visible que les deux portions de la parabole tomberoient exactement l'une sur l'autre.

* *Art.* 9.

PROPOSITION II.

Theorême.

13. *SI l'on mene par l'origine* A *de l'axe* AP *une ligne droite quelconque* AM *dans l'un ou l'autre des angles* PAL, PAL, *faits par l'axe* AP *& par la ligne* LL *parallele à ses ordonnées; je dis qu'elle ira rencontrer la parabole* MAM *en un autre point* M.

FIG III.

Ayant pris sur *AL* de part ou d'autre du point *A* la partie *AG* égale au parametre *p* de l'axe, & tiré *GF* parallele à l'axe *AP*, & qui rencontre la ligne *AM* (prolongée s'il est necessaire) au point *F*; on prendra sur la ligne *AL* du même côté où tombe la ligne *AM* par rapport à l'axe *AP*, la partie *AL* égale *GF*; & ayant tiré *LM* parallele à l'axe, je dis que le point *M* où cette ligne rencontre la droite *AM*, sera à la parabole *MAM*.

Car menant *MP* parallele à *AL*, les triangles semblables *FGA*, *APM*, donnéront *FG* ou *AL* ou *PM*. *GA* :: *AP*. *PM*. Et partant $\overline{PM}^2 = GA\,(p) \times AP$. La ligne *PM* sera donc * une ordonnée à l'axe *AP*. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* *Art.* 7.

COROLLAIRE I.

14. DE-LA on voit comment l'axe *AP* d'une parabole *MAM* étant donné avec son parametre *p*, & ayant mené par l'origi-

ne A de l'axe dans l'un ou l'autre des angles PAL, PAL, faits par l'axe AP & par la ligne LL parallele à ses ordonnées, une ligne droite quelconque AM; on voit, dis-je, ce qu'il faut faire pour trouver sur cette ligne le point M où elle rencontre la parabole MAM.

COROLLAIRE II.

15. Il est évident * qu'il n'y a que la ligne LAL parallele aux ordonnées à l'axe AP, qui puisse être tangente de la parabole MAM au point A origine de l'axe; puisqu'il n'y a que cette seule ligne qui passant par le point A, & étant continuée de part & d'autre, ne rencontre la parabole en aucun autre point, & n'entre pas dedans. * Art. 10. 13.

DE'FINITIONS.

9.

Si l'on mene par un point quelconque M de la parabole un diametre MO, une ordonnée MP à l'axe AP, & une ligne droite MT qui coupe sur l'axe AP prolongé au delà de son origine A, la partie AT égale à AP; toutes les lignes droites, comme NO, menées des points de la parabole parallement à MT, & terminées par le diametre MO, sont appellées *Ordonnées* à ce diametre. FIG. IV. & V.

10.

Si l'on prend la ligne q troisiéme proportionnelle à AT, MT; cette ligne q sera nommée le ***Parametre*** du diametre MO.

COROLLAIRE I.

16. Si l'on nomme l'indéterminée AP ou AT, x; il est clair que $\overline{MT}^2 = qx$, puisque $AT\ (x).\ MT :: MT.\ q$.

COROLLAIRE II.

17. A Cause du triangle rectangle MPT, le quarré $\overline{MT}^2\ (qx) = \overline{PT}^2\ (4xx) + \overline{MP}^2$ * (px); d'où en divisant par x, l'on tire $q = 4x + p$. * Art. 7.

C'est à dire que le parametre q d'un diametre quelconque MO, surpasse le parametre p de l'axe du quadruple de AP (x).

COROLLAIRE III.

18. SI l'on tire du point M au foyer F la droite MF, on aura
* *Art.* 5. $MF * = AP + AF$. Or selon la définition 5[e]. le parametre de l'axe étant $p = 4\ AF$, le parametre du diametre MO sera
* *Art.* 17. * $q = 4\ AP + 4\ AF$. Donc le parametre q d'un diametre quelconque MO, vaut quatre fois la ligne MF tirée de son origine M au foyer F.

PROPOSITION III.

Theorême.

19. *LE quarré d'une ordonnée quelconque* ON *au diametre* MO,
FIG. IV. V. *est égal au rectangle du parametre* q, *par la partie* MO *de ce diametre, prise entre son origine* M *& la rencontre* O *de l'ordonnée.*

Il faut prouver que $\overline{ON}^2 = q \times MO$.

Ayant mené l'ordonnée NQ à l'axe AP, laquelle rencontre le diametre MO au point R, & tiré OH parallele à MP, on nommera les données AP ou AT, x; PM ou RQ, y; & les indéterminées OR ou HQ, a; MO ou PH, b; les triangles semblables TPM, ORN, donneront cette proportion TP $(2x)$ $PM\ (y) :: OR\ (a)$. $RN = \frac{ay}{2x}$. Cela posé.

Puisque (*fig.* 4) $NQ = RQ\ (y) - RN\ (\frac{ay}{2x})$, ou RN $(\frac{ay}{2x}) - RQ\ (y)$, & $AQ = AH\ (x + b) - HQ\ (a)$, lorsque le point N tombe du côté de l'axe AP par rapport au diametre MO; & qu'au contraire (*fig.* 5.) $NQ = RQ\ (y) + RN\ (\frac{ay}{2x})$, & $AQ = AH\ (x + b) + HQ\ (a)$, lorsqu'il tombe du côté opposé : on aura $\overline{QN}^2 = yy \pm \frac{ayy}{x} + \frac{aayy}{4xx}$, & $AQ = x + b \pm a$, sçavoir — dans le premier cas, & + dans le second.
* *Art.* 8. Or * $AP\ (x)$. $AQ\ (x + b \pm a) :: \overline{PM}^2$ (yy). $\overline{QN}^2 = yy + \frac{byy}{x} \pm \frac{ayy}{x}$. On formera donc en comparant ensemble ces deux valeurs de $\overline{QN}^2$, l'égalité $yy + \frac{byy}{x} \pm \frac{ayy}{x} = yy \pm \frac{ayy}{x} + \frac{aayy}{4xx}$; d'où en effaçant de part & d'autre $yy \pm \frac{ayy}{x}$, divisant par yy, & multipliant par $4xx$, l'on tirera $\overline{OR}^2\ (aa) = 4bx$. Mais les triangles semblables MPT, NRO,

NRO, donnent $\overline{PT}^2$ $(4xx)$. $\overline{OR}^2$ $(4bx)$ :: $\overline{MT}^2$ *(qx). $\overline{ON}^2$ = bq = $q \times MO$ (b). *Ce qu'il falloit, &c.* * *Art.* 16.

COROLLAIRE GENERAL.

20. Il est visible que ce qu'on a démontré dans la proposition premiere par rapport à l'axe *AP*, à ses ordonnées *PM*, & à son parametre *p*, s'étend par le moyen de cette derniere proposition à un diametre quelconque *MO*, à ses ordonnées *ON*, & à son parametre *q*. Or comme les articles, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 & 15 se tirent de la premiere proposition, & subsistent également, soit que les angles *APM* soient droits, ou bien qu'ils ne le soient pas; il s'ensuit que si l'on imagine dans ces articles que la ligne *AP*, au lieu d'être l'axe, soit un diametre quelconque, qui ait pour ordonnées les droites *PM*, *QN*, & pour parametre la ligne *p*, ils seront encore vrais dans cette supposition; car leur démonstration demeurera la même, & il ne faut pour s'en convaincre entierement, que les relire en mettant partout où se trouve le mot d'axe, celui de diametre.

COROLLAIRE II.

21. Comme les articles 10 & 15 subsistent avec la même force, lorsque la ligne *AP* au lieu d'être l'axe, est un diametre quelconque, tel que *MO*; il s'ensuit que la ligne *MT* parallele aux ordonnées *ON* à ce diametre, est tangente en *M*, & qu'il n'y a que cette seule ligne qui puisse toucher la parabole en ce point. FIG. IV. & V.

D'où l'on voit que d'un point donné sur une parabole, on ne peut mener qu'une seule tangente.

COROLLAIRE III.

22. De là il est évident selon la définition 9. que si l'on mene par un point quelconque *M* d'une parabole, une ordonnée *MP* à l'axe *AP*, & une ligne droite *MT* qui coupe sur l'axe prolongé du côté de son origine *A*, la partie *AT* égale à *AP*; cette ligne *MT* sera tangente en *M*. Et reciproquement que si la ligne *TM* est tangente en *M*, & qu'on mene l'ordonnée *MP* à l'axe; les parties *AT*, *AP*, de l'axe seront égales entr'elles.

COROLLAIRE IV.

23. Si l'on imagine dans les définitions 9 & 10, & dans la derniere proposition, que la ligne *AP* au lieu d'être l'axe, soit un diametre quelconque, qui ait pour ordonnées les droites
FIG. VI. *PM*, *QN*; on verra que cette proposition sera encore vraye, puisqu'elle se démontrera de la même maniere qu'auparavant, comme il est évident par la seule inspection de la fig. 6. où les triangles semblables donnent les mêmes proportions que dans le cas de l'axe.

D'où il suit 1°. Que le Corollaire précedent doit encore avoir lieu, lorsque la ligne *AP* au lieu d'être l'axe, est un diametre quelconque. 2°. Que le diametre *MO* peut être l'axe dans cette supposition; & qu'ainsi on peut regarder l'axe comme un diametre qui fait avec ses ordonnées des angles droits.

PROPOSITION IV.

Theorême.

24. *Si par un point quelconque* M *d'une parabole, l'on mene une*
FIG. VII. *ordonnée* MP *à l'axe, & une perpendiculaire* MG *à la tangente* MT *qui passe par le point* M; *je dis que la partie* PG *de l'axe sera toujours égale à la moitié de son parametre* p.

Il faut prouver que $PG = \frac{1}{2}p$.

Car à cause des angles droits *TPM*, *TMG*, on aura *TP* $(2x) . PM (y) :: PM (y) \; PG = \frac{yy}{2x} = \frac{1}{2}p$, en mettant à
* *Art.* 7. la place de *yy* sa valeur * *px*.

PROPOSITION V.

Theorême.

25. *Si par un point quelconque M d'une parabole, l'on mene au*
FIG. VII. *foyer* F *la droite* MF, *un diametre* MO, *& une tangente* TMS; *les angles* FMT, OMS, *faits par la tangente* TMS *d'un côté avec la droite* MF, *& de l'autre avec le diametre* MO, *seront égaux entr'eux*.

Car menant l'axe *AP* qui rencontre en *T* la tangente *TMS*,
* *Art.* 22. & l'ordonnée *MP* à l'axe, on aura * *TA* + *AF* ou *TF* =
* *Art.* 5. *AP* + *AF* ou * *MF*. Le triangle *TFM* sera donc isocelle;

& par consequent l'angle *FTM*, ou sont égal *OMS*, sera égal à l'angle *FMT*. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

26. DE-LA il est clair que la tangente *TMS* prolongée indéfiniment de part & d'autre du point touchant *M*, laisse la parabole toute entiere du côté de son foyer *F*. Et comme cela arrive toujours en quelque endroit de la parabole que tombe le point touchant *M*, il s'ensuit que cette ligne courbe est concave dans toute son étenduë autour de son foyer *F*.

PROPOSITION VI.

Problême.

27. *UN diametre* AP *avec la tangente* LAL *qui passe par son origine* A, *& son parametre étant donnés ; trouver un diametre* BQ *qui fasse de part ou d'autre avec ses ordonnées, un angle égal à l'angle donné* K, *son origine* B, *& son parametre.* FIG. VIII. & IX.

Ayant mené par l'origine *A* du diametre donné la ligne *AE* qui fasse avec ce diametre de part ou d'autre, l'angle *PAE* égal à l'angle donné *K*, & trouvé * sur cette ligne (prolongée de l'autre côté de *A* lorsqu'elle ne tombe point dans l'un ou l'autre des angles *PAL*, *PAL*) le point *M* où elle rencontre la parabole, on menera par le point du milieu *Q* de la ligne *AM*, une parallele *QD* au diametre *AP*, qui rencontre la tangente *AL* au point *D*; & on divisera *QD* par le milieu en *B*. Je dis que la ligne *BQ* est le diametre qu'on cherche, qu'il a pour origine le point *B*, & pour parametre une troisiéme proportionnelle à *BQ*, & *QA*. * Art. 14. & 20.

Car 1°. La ligne *AM* étant divisée en deux parties égales au point *Q* par le diametre *BQ*, elle sera ordonnée * de part & d'autre à ce diametre; & comme les lignes *BQ*, *AP* sont paralleles entr'elles, l'angle *BQA* que fait le diametre *BQ* avec son ordonnée *QA* sera égal à l'angle *PAM* égal à l'angle donné *K* ou son complement à deux droits. 2°. Le point du milieu *B* de la ligne *QD* sera l'origine * de ce diametre, puisque *AQ* en est une ordonnée. 3°. Le parametre du diametre *BQ* est * la troisiéme proportionnelle à *BQ*, *QA*. * Art. 11. & 20. * Art. 22. & 23. * Art. 19.

Lorsque l'angle donnée *K* n'est pas droit, il est clair qu'on FIG. VIII.

peut mener de part & d'autre du diametre *AP* deux differentes lignes *AE* qui fassent avec ce diametre des angles égaux à l'angle donné *K*; & qu'ainsi on pourra toujours avoir deux solutions differentes, en observant que si l'une des deux lignes *AE* tomboit sur la tangente *AL*, le diametre donné *AP* satisferoit lui-même à la question. Mais lorsque cet angle *K* est
FIG. IX. droit, comme l'on ne peut mener qu'une seule ligne *AE* qui fasse avec le diametre *AP* un angle droit, il s'ensuit qu'on ne
* *Art.* 23. peut avoir alors qu'une solution; & qu'ainsi * le diametre cherché sera l'axe.

Il est à remarquer que les deux diametres *BQ*, *BQ*, qui
FIG. X. satisfont au Problême lorsque l'angle donné *K* n'est pas droit, sont semblablement posés de part & d'autre de l'axe *AP*, & que leurs parametres sont égaux; ce qui se voit par la construction même, en supposant que le diametre donné *AP* soit l'axe, & en menant deux differentes lignes *AE*, *AE* de part & d'autre. Car les triangles rectangles *ALM*, *ALM*, & *ADQ*, *ADQ* étant visiblement égaux & semblables entr'eux, les lignes *AD*, *AD*; *DQ*, *DQ*; leurs moitiés *BQ*, *BQ*; & les ordon-
* *Art.* 19. nées *QA*, *QA* seront égales entr'elles; * & par consequent les parametres le seront aussi.

COROLLAIRE.

28. Il est donc évident, 1°. qu'il n'y a qu'un seul diametre qui fasse avec ses ordonnées des angles droits; & qu'ainsi il ne peut y avoir qu'un seul axe. 2°. Qu'on peut toujours trouver deux differens diametres, qui fassent avec leurs ordonnées des angles égaux à un angle donné, lorsque cet angle n'est pas droit; que ces deux diametres seront semblablement posés de part & d'autre de l'axe, & qu'ils auront des parametres égaux.

PROPOSITION VII.

Problême.

29. *Un diametre étant donné avec la tangente qui passe par son origine, & son parametre; décrire la parabole par un mouvement continu.*

PREMIERE MANIERE.

Si le diametre donné étoit l'axe, on la décriroit selon l'ar-

ticle 4e; mais lorsqu'il ne l'est pas, soit *MO* le diametre donné, & *TMS* la tangente qui passe par son origine *M*. Cela posé. FIG. XI.

On prendra sur le diametre *MO* prolongé au de-là de son origine *M*, la partie *MD* égale au quart de son parametre; & on tirera une perpendiculaire indéfinie *DE* à *MD*. On menera *MF* qui fasse avec la tangente *TMS* un angle *FMT* égal à l'angle *OMS*; & ayant pris *MF* égale à *MD*, on décrira selon la définition premiere, une parabole qui ait pour directrice la ligne *DE*, & pour foyer le point *F*. Je dis qu'elle sera celle qu'on demande.

Car, 1°. La ligne *MO* étant perpendiculaire à la directrice *DE*, sera parallele à l'axe; & par consequent un diametre selon la définition 7e. 2°. La ligne *TMS* sera * tangente en *M*. 3°. Le parametre du diametre *MO* sera * quadruple de *MF*. *Art. 25. *Art. 18.

SECONDE MANIE'RE.

Soit *AP* le diametre donné, & *LAL* la tangente qui passe par son origine *A*. Cela posé. FIG. XII.

Ayant pris sur le diametre *AP* prolongé au de-là de son origine *A* la partie *AG* égale à son parametre, & mené une droite indéfinie *DGD* qui fasse avec *AG* l'angle *AGD* égal à l'angle *GAL* pris du même côté; on fera mouvoir une ligne droite indéfinie *DM* le long de *GD* toujours parallelement à *AG*, en entraînant par son extrémité *D* le côté *DA* de l'angle *DAM* égal à l'angle *GAL*, & mobile par son sommet autour du point fixe *A*. Je dis que l'intersection continuelle *M* de la ligne *DM* & du côté *AM*, décrira dans ce mouvement la parabole qu'on demande.

Car menant *MP* parallele à *AL*, les lignes *MP*, *GD* seront égales entr'elles, puisque l'angle *APM* ou *GAL* étant égal à l'angle *AGD*, elles seront également inclinées entre les paralleles *GP*, *DM*. Or les triangles *AGD*, *MPA* sont semblables: car l'angle *MPA* ou *GAL* est égal à l'angle *AGD*; & l'angle *PMA* ou *MAL* égal à l'angle *GAD*, puisque retranchant des angles égaux *GAL*, *DAM*, le même angle *DAL*, les restes doivent être égaux. On aura donc $AG . GD$ ou $PM :: PM . AP$, & partant $GA \times AP = \overline{PM}^2$; d'où il clair que *PM* est * une ordonnée au diametre *AP* qui a pour origine *Art. 19. & 21.

le point A, pour tangente la ligne LAL, & pour parametre la ligne AG. *Ce qu'il falloit, &c.*

FIG. XIII. Si le diametre AP étoit l'axe, alors les lignes GD, AL, feroient paralleles, & la démonſtration deviendroit plus facile; car l'on voit tout d'un coup que GD eſt égale a PM, & que les triangles rectangles AGD, MPA ſont ſemblables; d'où il ſuit $AG . GD$ ou $PM :: PM . AP$. Donc $AG \times AP = \overline{PM}^2$, &c.

PROPOSITION VIII.

Problême.

30 *UN diametre* AP *étant donné avec ſon parametre, & la tangente* AL *qui paſſe par l'origine* A *de ce diametre; trouver autant de differens points que l'on voudra de la parabole, ou (ce qui eſt la même choſe) la décrire par pluſieurs points.*

PREMIERE MANIE'RE.

FIG. XIV. Ayant pris ſur le diametre AP prolongé au de-là de ſon origine A, la partie AG égale à ſon parametre, diviſé AG en deux parties égales au point D, & mené une ligne droite indéfinie AF perpendiculaire à AG; on décrira d'un point C pris partout où l'on voudra ſur DA prolongée indéfiniment du côté de A, comme centre, & du rayon CG, un arc de cercle PF qui coupera le diametre AP & ſa perpendiculaire AF en deux points P, F. On menera par le point P une parallele MPM à la tangente AL, ſur laquelle on prendra de part & d'autre les parties PM, PM, égales chacune à AF. On trouvera de la même maniere autant de couple de points M que l'on voudra; par leſquels on fera paſſer une ligne courbe MAM qui ſera la parabole qu'on demande.

Car tous les arcs PF paſſant par le même point G, & ayant leurs centres ſur la ligne GA prolongée, s'il eſt neceſſaire du côté de A, auront pour diametres les lignes GP; & par conſequent la proprieté de ces cercles donnera toujours $\overline{AF}^2 = GA \times AP$. Mais chaque PM eſt * égale à ſa correſpondante AF, & de plus parallele à la tangente AL qui paſſe par l'origine A du diametre AP; elle ſera donc * ordonnée à ce diametre. C'eſt

* Hyp.

* Art. 19. & 21.

pourquoi la Parabole qu'on demande, doit passer par tous les points M, trouvés comme l'on vient d'enseigner.

Il est visible qu'on peut se tromper en traçant les parties de la parabole, qui joignent les points trouvés; mais on voit en même temps que l'erreur ne peut être sensible, lorsque ces points sont fort près les uns des autres. Ceux qui ont besoin de décrire souvent des Sections Coniques, préferent ordinairement cette methode, de les décrire par plusieurs points; parce que les machines dont on se sert pour les décrire par un mouvement continu, étant composées, sont souvent fautives, & peu exactes dans la pratique.

SECONDE MANIÉRE.

Ayant mené par un point quelconque L de la tangente AL, une parallele indéfinie LE au diametre AP; on prendra sur cette ligne & sur le diametre AP prolongé au de-là de son origine A, les parties LE, EE, EE, &c. AF, FF, FF, &c. toutes égales entr'elles, & de telle grandeur qu'on voudra. On marquera sur LE, le point M, en sorte que LM soit troisiéme proportionnelle au parametre donné du diametre AP, & à la partie AL de la tangente. On tirera enfin des points A, M, les lignes AE, AE, AE, &c. MF, MF, MF, &c; je dis que les points d'intersection N, N, N, &c. de chaque AE, avec la correspondante MF, seront tous à la parabole qu'on demande. FIG. XV.

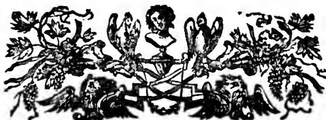
Car menant par le point marqué M, & par l'un des points trouvez N, les lignes MP, NQ, paralleles à la tangente AL, & nommant AP, x; PM ou AL, y; AQ, u; QN, z; les triangles semblables NQA, ALE, & MPF, NQF, donneront ces deux proportions $QN(z) . QA(u) :: AL(y) . LE$ ou $AF = \frac{uy}{z}$. & $MP(y) . PF$ ou $PA + AF \left(x + \frac{uy}{z}\right) :: NQ(z) . QF$ ou $QA + AF \left(u + \frac{uy}{z}\right)$. D'où en multipliant les Extrêmes & les Moyens, l'on forme l'égalité $uy + \frac{uyy}{z} = xz + uy$, & effaçant de part & d'autre uy, & multipliant par z, il vient $uyy = xzz$, qui se reduit à cette proportion $AP(x) . AQ(u) :: \overline{MP}^2 (yy) \overline{NQ}^2 (zz)$. Or par la construction, le quarré de AL ou de PM, est égal au rectangle de la partie AP du diametre donné, par son parametre. Cette ligne PM sera donc * une ordonnée au diametre AP; & par consequent QN * Art. 19. & 21.

* *Art.* 8. & 20. en sera * une autre. Ainsi le point *N* sera l'un des points de la parabole qui tombent d'un côté du diametre *AP*: pour les avoir de l'autre, il n'y a qu'à prendre sur les droites indéfinies *LE*, *AF*, les parties égales *LE*, *EE*, &c. *AF*, *FF*, &c: de l'autre côté des points *L*, *A*.

Si au lieu du parametre du diametre *AP* que l'on suppose ici donné, l'on avoit un des points *M* de la parabole; ce qui arrive souvent: il n'y auroit qu'à mener par ce point, une parallele indefinie *LE*, au diametre *AP*, & achever le reste comme cy-dessus.



LIVRE



LIVRE SECOND.

De l'Ellipse.

DÉFINITIONS.

I.



YANT attaché ſur un plan les deux bouts d'un fil *FMf*, en deux points *F*, *f*, dont la diſtance *Ff* ſoit moindre que la longueur du fil, on ſe ſervira d'un ſtile *M*, pour tenir ce fil toujours tendu ; & conduiſant ce ſtile autour de ces deux points, en ſorte qu'il revienne au même point d'où il étoit parti : ce ſtile décrira dans ce mouvement, une ligne courbe, qui ſera nommée *Ellipſe*. FIG. XVI.

2.

Les deux points fixes *F*, *f*, ſont nommés les deux *Foyers*.

3.

La ligne *Aa*, qui paſſe par les deux Foyers *F*, *f*, & qui eſt terminée de part & d'autre par l'Ellipſe, eſt appellée le *premier* ou le *grand Axe*.

4.

Le point *C*, qui diviſe par le milieu le premir Axe *Aa*, eſt nommé le *Centre* de l'Ellipſe.

5.

La ligne *Bb*, menée par le Centre *C*, perpendiculairement au premier Axe *Aa*, & terminée de part & d'autre par l'Ellipſe, eſt appellée le *ſecond* ou le *petit Axe*.

6.

Les deux Axes *Aa*, *Bb*, ſont appellez enſemble, *Conjuguéz*: de ſorte que le premier Axe *Aa*, eſt dit conjugué au ſecond *Bb*; & reciproquement le ſecond *Bb*, conjugué au premier *Aa*.

7.

Les lignes *MP*. *MK*, meneés des points *M* de l'Ellipſe parallelement à l'un des Axes, & terminées par l'autre, ſont appellées *Ordonnées* à cet autre Axe: ainſi *MP* eſt Ordonnée à l'Axe *Aa*, & *MK* à l'Axe *Bb*.

8.

La troiſiéme proportionnelle aux deux Axes, eſt appellée *Parametre* de celui qui eſt le premier terme de la proportion. Ainſi ſi l'on fait comme le premier Axe *Aa*, eſt au ſecond Axe *Bb*, de même le ſecond *Bb*, à une troiſiéme proportionnelle *p*; cette ligne *p* ſera le Parametre du premier Axe.

9.

Toutes les lignes droites qui paſſent par le centre *C*, & qui ſont terminées de part & d'autre par l'Ellipſe, ſont appellées *Diametres*.

10.

Une ligne droite qui ne rencontre l'Ellipſe qu'en un ſeul point, & qui etant continuée de part & d'autre, n'entre point dedans, mais tombe au dehors, eſt appellée *Tangente* en ce point.

REMARQUE.

31. SI l'on conçoit que les deux foyers *F*, *f*, & le centre *C* ſe
FIG. XVII. reuniſſent en un ſeul point; il eſt viſible que l'Ellipſe ſe changera alors en un Cercle qui aura pour rayon la droite *CM*, égale à la moitié de la corde *CMC*, attachée par ces deux bouts au point *C*, qui en ſera le centre. On pourra donc conſiderer un cercle comme une eſpece particuliere d'Ellipſe, dans laquelle la diſtance des foyers eſt nulle; de ſorte que tout ce qu'on démontrera dans la ſuite de l'Ellipſe, telle que puiſſe être la diſtance de ces deux foyers, ſe peut auſſi appliquer au cercle, en ſuppoſant que cette diſtance devienne nulle.

COROLLAIRE I.

32. IL suit de la définition premiere, que si l'on mene d'un point quelconque M de l'Ellipse, aux deux foyers F, f, les droites MF, Mf; leur somme sera toujours la même. FIG. XVI.

COROLLAIRE II.

33. LORSQUE le point M tombe en A, il est visible que MF devient AF, & que Mf devient Af: de même lorsque le point M tombe en a, il est encore visible que MF devient aF, & que Mf devient af. On aura donc $AF + Af$, ou $2AF + Ff = aF + af$, ou $2af + fF$; & partant $AF = af$. D'où il suit:

1°. Que la somme des deux droites MF, Mf, est toujours égale au premier axe Aa, puisque $Mf + MF = Af + AF = Af + fa$.

2°. Que la distance Ff des foyers, est divisée en deux parties égales par le centre C, puisque $CA - AF$ ou $CF = Ca - af$ ou Cf.

COROLLAIRE III.

34. SI de l'extremité B du second axe Bb, l'on mene aux deux foyers F, f, les droites BF, Bf; il est clair que les triangles rectangles BCF, BCf, seront égaux; & qu'ainsi l'hypothenuse BF, est égal à l'autre hypothenuse Bf: & par consequent BF, ou $Bf = CA$ ou Ca, puisque * $BF + Bf = Aa$. On prouve de même que Fb ou $bf = CA$ ou Ca. D'où l'on voit: * Art. 33.

1°. Que le second axe Bb, est divisé en deux parties égales par le centre C; car les triangles rectangles FCB, FCb seront égaux, puisqu'ils ont des hypothenuses égales FB, Fb, & le côté FC commun.

2°. Que le second axe Bb, est toujours moindre que le premier Aa; puisque sa moitié BC étant l'un des côtez du triangle rectangle BCF, sera moindre que son hypothenuse BF, qui est égale à la moitié CA du premier axe Aa.

3°. Que si l'on décrit de l'une des extremitez B du petit ou second axe Bb comme centre, & du rayon BF égal à CA, moitié du premier ou grand axe Aa, un cercle, il coupera ce grand axe en deux points F, f, qui seront les deux foyers de l'Ellipse.

COROLLAIRE IV.

35. LES mêmes choses étant posées, si l'on nomme CA ou BF, t; CF, m; le triangle rectangle BCF, donnera $\overline{BC}^2 = tt - mm$. Or $AF = t - m$, & $Fa = t + m$, & partant $AF \times Fa = tt - mm$. D'où il est évident que le quarré de la moitié CB du petit axe Bb, est égal au rectangle de AF par Fa parties du grand axe Aa, prises entre l'un des foyers F, & ses deux extremités A, a.

COROLLAIRE V.

36. IL sera facile à present de décrire une Ellipse dont les deux
* Art. 34. axes Aa, Bb, sont donnez. Car ayant trouvé * sur le premier ou grand axe Aa, les foyers F, f, on attachera dans ces points, les extremités d'un fil FMf, dont la longueur égalera celle de cet axe; & ayant décrit par le moyen de ce fil, une Ellipse comme l'on a enseigné dans la définition premiere, il est évident qu'elle sera celle qu'on demande.

PROPOSITION I.

Theorême.

37. *SI l'on mene l'ordonnée* MP *au premier ou grand axe* Aa, *&*
FIG. XVI. *qu'on prenne sur cet axe la partie* AD *égale à* MF; *Je dis que* CA . CF :: CP . CD.

Ayant nommé, comme auparavant, les données CA, t; CF, m; & de plus les indeterminités CP, x; PM, y; & l'inconnuë CD, z; il peut arriver deux differens cas.

Premier cas. Lorsque le point P tombe au dessus du centre C. Comme PF est toujours moindre que Pf; il s'ensuit que MF ou AD sera moindre que Mf ou aD; c'est pourquoi AD ou $MF = t - z$, aD ou $Mf = t + z$, $FP = m - x$ ou $x - m$ (selon que le point P tombe au dessous ou au dessus du foyer F), $Pf = x + m$. Or les triangles rectangles MPF, MPf, donnent $tt - 2tz + zz = yy + mm - 2mx + xx$, & $tt + 2tz + zz = yy + mm + 2mx + xx$. Donc si l'on retranche par ordre chaque membre de la premiere égalité de ceux de la seconde, on aura $4tz = 4mx$; d'où l'on tire CD $(z) = \frac{mx}{t}$.

Second cas. Lorsque le point P tombe au dessous du centre C, comme PF est toujours plus grande que Pf, il s'ensuit que MF ou AD, sera plus grande que Mf ou aD : c'est pourquoi AD ou $MF = t + z$, aD ou $Mf = t - z$, $PF = x + m$, $Pf = x - m$ ou $m - x$ (selon que le point P tombe au dessous ou au dessus du foyer f). Or les triangles rectangles MPF, MPf, donnent $tt + 2tz + zz = yy + mm + 2mx + xx$, & $tt - 2tz + zz = yy + mm - 2mx + xx$. Donc si l'on retranche par ordre chaque membre de la seconde égalité de ceux de la premiere, on aura $4tz = 4mx$; d'où l'on tire encore $CD\ (z) = \frac{mx}{t}$. Par consequent en l'un & l'autre cas, on aura $CA\ (t).\ CF\ (m) :: CP\ (x).\ CD\ (z)$. *Ce qu'il falloit démontrer*.

COROLLAIRE.

38. Il est donc évident que si l'on nomme les données CA ou Ca, t ; CF ou Cf, m ; & l'indéterminée CP, x ; on aura toujours $MF = t - \frac{mx}{t}$, & $Mf = t + \frac{mx}{t}$, lorsque le point P tombe au dessus du centre C : & qu'au contraire on aura $MF = t + \frac{mx}{t}$, & $Mf = t - \frac{mx}{t}$, lorsqu'il tombe au dessous.

PROPOSITION II.

Theorême.

39. *Le quarré d'une ordonnée quelconque* MP *à l'axe* Aa, *est au rectangle de* AP *par* Pa, *parties de cet axe, comme le quarré de son conjugué* Bb, *est au quarré de l'axe* Aa.

Il faut prouver que $\overline{PM}^2 .\ AP \times Pa :: \overline{Bb}^2 .\ \overline{Aa}^2$.

Les mêmes choses étant posées que dans l'article precedent, si l'on met dans l'égalité $tt + 2tz + zz = yy + mm + 2mx + xx$ que l'on a trouvée * par le moyen du triangle rectangle MPF, à la place de z sa valeur $\frac{mx}{t}$, on formera toujours celle-ci $ttyy = t^4 - ttxx - mmtt + mmxx$, laquelle étant réduite à une proportion, donne $\overline{PM}^2\ (yy).\ AP \times Pa\ (tt - xx) :: \overline{BC}^2 *\ (tt - mm).\ \overline{CA}^2\ (tt) :: \overline{Bb}^2 .\ \overline{Aa}^2$. *Ce qu'il falloit, &c.*

* Art. 37.

* Art. 35.

COROLLAIRE I.

40. Si l'on mene une ordonnée MK à l'autre axe Bb, lequel j'appelle $2c$, il eſt clair que $MK = CP\ (x)$, & que $CK = PM$
* *Art.* 39. (y). Or * $\overline{PM}^2\ (yy)$. $AP \times Pa\ (tt - xx) :: \overline{Bb}^2\ (4cc)$. $\overline{Aa}^2\ (4tt)$. Et partant $4ccxx = 4cctt - 4ttyy$; ce qui donne cette proportion $\overline{MK}^2\ (xx)$. $BK \times Kb\ (cc - yy) :: \overline{Aa}^2\ (4tt)$. $\overline{Bb}^2\ (4cc)$.

C'eſt à dire que le quarré d'une ordonnée quelconque MK à l'axe Bb, eſt au rectangle de BK par Kb parties de cet axe, comme le quarré de ſon conjugué Aa, eſt au quarré de l'axe Bb.

COROLLAIRE FONDAMENTAL.

41. Si l'on nomme l'un ou l'autre axe Aa, $2t$; ſon conjugué Bb,
FIG. XVIII. XIX. $2c$; ſon parametre p; chacune de ſes ordonnées PM, y; chacune de ſes parties CP priſes entre le centre & les rencontres
* *Art.* 39. des ordonnées, x; on aura * toujours $\overline{PM}^2\ (yy)$. $AP \times Pa\ (tt - xx) :: \overline{Bb}^2\ (4cc)$. $\overline{Aa}^2\ (4tt) :: p$. $Aa\ (2t)$. Puiſque ſelon la définition du Parametre, $Aa\ (2t)$. $Bb\ (2c) :: Bb\ (2c)$. $p = \frac{4cc}{2t}$. D'où en multipliant d'abord les extrêmes & les moyens de la proportion yy. $tt - xx :: 4cc$. $4tt$, & enſuite de l'autre yy. $tt - xx :: p$. $2t$. L'on tire $yy = cc - \frac{ccxx}{tt}$, & $yy = \frac{1}{2}pt - \frac{pxx}{2t}$. Or comme cette propriété convient également à tous les points de l'Ellipſe, & qu'elle en détermine la poſition par rapport aux deux axes conjugués Aa, Bb; il s'enſuit que l'équation $yy = cc - \frac{ccxx}{tt}$, ou $yy = \frac{1}{2}pt - \frac{pxx}{2t}$, exprime parfaitement la nature de l'Ellipſe par rapport à ſes axes.

COROLLAIRE III.

42. Si l'on mene deux ordonnées quelconques MP, NQ à l'axe Aa; leurs quarrés ſeront entr'eux comme les rectangles $AP \times PA$, AQ * Qa, des parties de cet axe, faites par la rencontre de ces mêmes ordonnées; car * $\overline{Bb}^2$. $\overline{Aa}^2 :: \overline{MP}^2$. $AP \times PA :: \overline{QN}^2$. $AQ \times Qa$. Et partant $\overline{PM}^2$. $\overline{QN}^2 :: AP \times Pa$. $AQ \times Qa$.

COROLLAIRE IV.

43. Si l'on mene par un point quelconque *P* de l'un des axes conjugués *Aa*, une parallele *MM* à l'autre axe *Bb*; elle rencontrera l'Ellipse en deux points *M*, *M*, également éloignés de part & d'autre du point *P*, & non en davantage. Car afin que les points *M*, *M*, soient à l'Ellipse, il faut * que les quarrés de *PM* (y) prise de part & d'autre de l'axe *Aa*, soient égaux chacun à la même quantité $cc - \frac{ccxx}{tt}$. * *Art.* 41.

COROLLAIRE V.

44. Il suit de cè que * $yy = cc - \frac{ccxx}{tt}$, que plus *CP* ($x$) prise de part & d'autre du centre *C* augmente plus chaque ordonnée *PM* (y) prise de part & d'autre de l'un ou de l'autre axe *Aa*, diminuë ; de sorte que *CP* (x) étant égale à *CA* ou *Ca* (t), chaque *PM* (y) devient alors nulle ou zero : & qu'au contraire plus *CP* (x) devient petite, plus aussi chaque ordonnée *PM* (y) prise de part & d'autre de l'axe *Aa* augmente ; de sorte que *CP* (x) devenant zero, chaque *PM* (y), qui est alors *CB* ou *Cb* (c), sera la plus grande des ordonnées. D'où il est clair. * *Art.* 41.

1°. Que si l'on mene par les extremités *B*, *b*, de l'un des axes conjugués, des paralleles à l'autre ; elles seront tangentes en ces points.

2°. Que l'Ellipse s'éloigne de part & d'autre de plus en plus de l'un ou de l'autre axe *Aa*, en commençant par l'extremité *A*; jusqu'à ce qu'elle rencontre son conjugué *Bb* ; après quoi elle va toujours en s'approchant du même axe *Aa*, jusqu'à ce qu'elle le rencontre en son autre extremité *a*.

COROLLAIRE VI.

45. Il suit encore de ce que * $yy = cc - \frac{ccxx}{tt}$, que si l'on prend les points *P*, *P*, également éloignés de part & d'autre du centre *C*; les ordonnées *PM*, *PM*, seront égales. D'où il est évident que si une ligne quelconque *MM*, terminée par l'Ellipse, est coupée en deux également par l'un des axes conjugués *Bb* en un point *K* autre que le centre ; elle sera parallele à l'autre *Aa*. Car menant les paralleles *MP*, *MP*, à l'axe *Bb*, la ligne *PP* sera divisée par le milieu en *C*, puisque *MM* l'est * *Art.* 41.

en K ; & partant les ordonnées PM, PM seront égales. La droite MM sera donc parallele à l'axe Aa.

COROLLAIRE VII.

46. SI l'on conçoit que le plan sur lequel l'Ellipse est tracée, soit plié le long d'un des axes Bb, en sorte que ses deux parties se joignent ; il est clair que les deux demi-Ellipses BAb, Bab, tomberont exactement l'une sur l'autre ; sçavoir, les points A,
* Art. 45. M, &c. sur a, M, &c. puisque * toutes les perpendiculaires Aa, MM, &c. à cet axe, sont coupées par le milieu aux points C, K, &c. D'où il est visible que l'Ellipse est coupée par les deux axes en quatre portions parfaitement égales & uniformes, qui ne different entr'elles que par leur situation.

PROPOSITION III.

Theorême.

47. *Si l'on mene par l'une des extremités* A *de l'un des axes* Aa, *une ligne droite quelconque* AM *dans l'un des angles* aAL, aAL, *faites par cet axe, & par la ligne* LAL *parallele à son conjugué* Bb; *je dis qu'elle rencontrera l'Ellipse en un autre point* M.

FIG. XX. Ayant pris sur AL de part ou d'autre du point A, la partie AG égale au parametre p de l'axe Aa, & tiré GF parallele à cet axe, & qui rencontre la ligne AM (prolongée, s'il est necessaire) au point F, on prendra sur la ligne AL du même côté où tombe la ligne AM par rapport à l'axe Aa, la partie AL égale à FG, & ayant tiré par l'autre extremité a de l'axe Aa la droite aL ; je dis que le point M où elle coupe la ligne AM, est à l'Ellipse MAM.

Car menant MP parallele à AL, & nommant les connuës Aa, $2t$; AG, p ; GF ou AL, a ; & les inconnues CP, x ; PM, y ; les triangles semblables AGF, MPA, & LAa, MPa, donneront $AG\ (p) . GF\ (a) :: MP\ (y) . AP\ (t \pm x) = \frac{ay}{p}$. Et $AL\ (a) . Aa\ (2t) :: PM\ (y) . aP\ (t \mp x) = \frac{2ty}{a}$. Et par consequent on aura toujours $AP \times Pa\ (tt - xx) = \frac{2tyy}{p}$, soit que le point P tombe au dessus ou au dessous du centre C ; d'où l'on tire $yy = \frac{1}{2}pt - \frac{pxx}{2t}$. La ligne PM sera donc

donc * une ordonnée à l'axe *Aa*; & partant le point *M* sera * *Art.* 41.
à l'Ellipse *MAM*. *Ce qu'il falloit démontrer*.

COROLLAIRE I.

48. **D**E LA on voit comment un axe *Aa* d'une Ellipse *MAM* étant donné avec son parametre *p*, & ayant mené par l'une des extremités *A* de cet axe, une ligne droite quelconque *AM* dans l'un ou l'autre des angles *aAL*, *aAL*, fait par cet axe, & par la ligne *LAL* parallele à son conjugué *Bb*; on voit, dis-je, ce qu'il faut faire pour trouver sur cette ligne le point *M* où elle rencontre l'Ellipse *MAM*.

COROLLAIRE II.

49. **I**L est évident qu'il n'y a que la ligne *LAL* parallele à l'axe *Bb*, qui puisse être tangente de l'Ellipse *MAM* au point *A*, l'une des extremités de son conjugué *Aa*; puisqu'il n'y a que cette seule ligne, qui passant par le point *A*, & étant continuée de part & d'autre, ne le rencontre en aucun point, & n'entre pas dedans.

PROPOSITION IV.

Theorême.

50. **T**OUS *les diametres comme* MCm, *sont coupés en deux également par le centre* C, *& ils ne rencontrent l'Ellipse qu'en deux points* M, m. FIG. XX.

Ayant mené l'ordonnée *MP*, & pris *Cp* égale à *CP*, si l'on mene la perpendiculaire *pm* terminée en *m* par la droite *MCm*; il est évident que les triangles *CPM*, *Cpm* sont semblables & égaux, & qu'ainsi *CM* est égale à *Cm*, & *Pm* à *pm*. Or comme * les ordonnées qui sont également éloignées de part * *Art.* 45.
& d'autre du centre *C*, sont égales entr'elles, & que *PM* est une ordonnée, il s'ensuit que *pm* sera aussi une ordonnée; & par consequent que le point *m* est à l'Ellipse.

De plus il est visible que si l'on imagine une parallele à l'axe *Bb*, qui se meuve de *C* vers *A*; la partie de cette parallele renfermée dans l'angle *ACM*, ira toujours en augmentant à mesure que *CP* croît, & qu'au contraire la partie de

cette parallele renfermée entre le quart d'Ellipse *AMb* & *Art. 44. l'axe *CA*, c'est à dire, l'ordonnée *PM* * ira toujours en diminuant; d'où il suit que la ligne droite *CM*, qui passe par le centre, ne rencontre l'Ellipse qu'en un point *M* du même côté de l'axe; & il en est de même pour le point *m* pris de l'autre côté. Donc &c.

DE'FINITIONS.

11.

FIG. XXI. XXII. Si l'on mene par un point quelconque *M* de l'Ellipse, un diametre *MCm*, une ordonnée *MP* à l'un ou l'autre axe *Aa*, & une ligne droite *MT*, en sorte que *CT* soit troisiéme proportionnelle à *CP*, *CA*; le diametre *SCs* parallele à *MT*, est appellé *Diametre conjugué* au diametre *Mm*; Et réciproquement le diametre *Mm* est dit conjugué au diametre *Ss*: de sorte que les deux ensemble sont appellés *Diametres conjugués*.

12.

Toutes les lignes droites menées des points de l'Ellipse parallelement à l'un de ces deux diametres, & terminées par l'autre, sont appellées *Ordonnées* à cet autre. Ainsi *NO* parallele au diametre *Ss*, est Ordonnée à son conjugué *Mm*.

13.

La troisiéme proportionnelle à deux diametres conjugués, est appellée *Parametre* du premier de la proportion. Ainsi la troisiéme proportionnelle à *Mm*, *Ss*, est appellée *Parametre* du diametre *Mm*.

COROLLAIRE.

51. Si l'on nomme la donnée *CA*, t; & les indéterminées *CP*, x; *PT*; s; il est clair, selon la définition 11ᵉ que CT $(x + s) = \frac{tt}{x}$; & qu'ainsi $sx = tt - xx = AP \times Pa$.

PROPOSITION V.

Theorême.

52. *Si l'on mene par les extremités* M, S, *de deux diametres conjugués* Mm, Ss, *deux ordonnées* MP, SK, *à un axe* Aa: *je dis que la partie* CK *de cet axe, prise entre le centre & la*

rencontre de l'une des ordonnées SK, *est moyenne proportionnelle entre les deux parties* AP, Pa, *faites par la rencontre de l'autre ordonnée* MP.

Il faut prouver que $\overline{CK}^2 = AP \times Pa$.

Ayant nommé les connuës CA, t; CP, x; PT, s; & l'inconnuë CK, m; on aura $AP \times Pa = tt - xx = {}^* sx$, & $AK \times Ka = tt - mm = sx + xx - mm$ en mettant pour tt sa valeur $xx + sx$. Cela posé, la proprieté de l'Ellipse * donnera $AP \times Pa\ (sx)$. $AK \times Ka\ (sx + xx - mm) :: \overline{PM}^2$. $\overline{KS}^2 :: \overline{TP}^2\ (ss)$. $\overline{CK}^2\ (mm)$. à cause des triangles semblables TPM, CKS. D'où l'on tire en multipliant les extrêmes & les moyens, & en transposant à l'ordinaire, $\overline{CK}^2\ (mm) = \frac{sxx + ssx}{x + s} = sx = AP \times Pa$. *Ce qu'il falloit démontrer.* *Art. 51. *Art. 42.

COROLLAIRE.

53. PUISQUE $\overline{CK}^2 = tt - xx$, il s'ensuit que $\overline{CA}^2 - \overline{CK}^2$ ou $AK \times Ka = xx$. Or * $\overline{CA}^2\ (tt)$. $\overline{CB}^2\ (cc) :: AK \times Ka$ (xx). $\overline{SK}^2 = \frac{ccxx}{tt}$. Et $\overline{CA}^2\ (tt)$. $\overline{CB}^2\ (cc) :: AP \times Pa\ (tt - xx)$ $\overline{PM}^2 = cc - \frac{ccxx}{tt}$. De plus à cause des triangles rectangles CPM, CKS, on aura le quarré $\overline{CM}^2$ ou $\overline{CP}^2 + \overline{PM}^2 = xx + cc - \frac{ccxx}{tt}$, & le quarré $\overline{CS}^2$ ou $\overline{CK}^2 + \overline{KS}^2 = tt - xx + \frac{ccxx}{tt}$. Donc $\overline{CM}^2 + \overline{CS}^2 = tt + cc$. *Art. 41.

C'est à dire que la somme des quarrés de deux diametres conjugués quelconques Mm, Ss; est égale à la somme des quarrés des deux axes Aa, Bb.

PROPOSITION VI.

Theorême.

54. LE *quarré d'une ordonnée quelconque* ON *au diametre* Mm, *est au rectangle de* MO x Om *fait des parties de ce diametre; comme le quarré de son conjugué* Ss, *est au quarré du même diametre* Mm.

Il faut prouver que $\overline{ON}^2$. $MO \times Om :: \overline{Ss}^2$. $\overline{Mm}^2$.

Ayant mené les paralleles NQ, OH, à l'axe Bb, & la pa-

rallele OR à son conjugué Aa, qui rencontre au point R l'ordonnée NQ prolongée, s'il est necessaire; on nommera les données CP, x; PM, y; CA, t; PT, s; & les indéterminées HQ ou OR, a; CH, b; & on aura à cause des triangles semblables CPM, CHO, & MPT, NRO, ces deux proportions $CP(x) . PM(y) :: CH(b) . HO$ ou $RQ = \frac{by}{x}$. Et $TP(s) . PM(y) :: OR(a) . RN = \frac{ay}{s}$. Cela posé.

Puisque (*fig* 21.) NQ est toujours la difference de $RQ(\frac{by}{x})$, $RN(\frac{ay}{s})$, & CQ la somme de $CH(b)$, $HQ(a)$, lorsque le point N tombe entre les points M, S, ou m, s; & qu'au contraire (*fig* 22.) NQ est toujours la somme de RQ, RN, & CQ la difference de CH, HQ, lorsque le point N tombe par tout ailleurs : on aura $\overline{NQ}^2 = \frac{bbyy}{xx} \mp \frac{2abyy}{sx} + \frac{aayy}{ss}$, & $\overline{CQ}^2 = aa \pm 2ab + bb$; sçavoir $- \frac{2abyy}{sx}$ & $+ 2ab$ dans le premier cas, & au contraire $+ \frac{2abyy}{sx}$ & $- 2ab$ dans le second

* *Art.* 42. cas. Or * $AP \times Pa\ (tt - xx) . AQ \times Qa$ ou $\overline{CA}^2 - \overline{CQ}^2$ $(tt - aa \mp 2ab - bb) :: \overline{PM}^2\ (yy)\ \overline{QN}^2 = \frac{ttyy - aayy \mp 2abyy - bbyy}{tt - xx}$. En comparant ensemble ces deux valeurs du quarré de NQ, on formera l'égalité $\frac{bbyy}{xx} \mp \frac{2abyy}{sx} + \frac{aayy}{ss} = \frac{ttyy - aayy \mp 2abyy - bbyy}{tt - xx}$, dans laquelle effaçant d'une part le terme $\mp \frac{2abyy}{sx}$ & de l'au-

* *Art.* 51. tre le terme $\mp \frac{2abyy}{tt - xx}$ qui lui est égale, puisque * $sx = tt - xx$, & divisant par yy, il vient $\frac{bb}{xx} + \frac{aa}{ss} = \frac{tt - aa - bb}{tt - xx}$.

Si l'on multiplie par xx, & qu'on transpose bb, on trouvera $\frac{aaxx}{ss}$ ou $\frac{aax^4}{ssxx} = \frac{ttxx - aaxx - bbtt}{tt - xx}$; & multipliant le premier membre par $ssxx$, & le second par le quarré de $tt - xx$ valeur de sx (ce qui se fait en multipliant simplement le numerateur par $tt - xx$) on aura $aax^4 = t^4xx - aattxx - bbt^4 - ttx^4 + aax^4 + bbttxx$; d'où en effaçant de part & d'autre aax^4, transposant $aattxx$, & divisant par $ttxx$, l'on tirera $\overline{HQ}^2$ ou $\overline{OR}^2\ (aa) = tt - xx + bb - \frac{bbtt}{xx}$.

Maintenant si l'on nomme le demi diametre CM ou Cm, z; on aura à cause des triangles semblables CPM, CHO, cette proportion $CP(x) . CM(z) :: CH(b) . CO = \frac{bz}{x}$. Et partant $MO \times Om = zz - \frac{bbzz}{xx}$. Or les triangles semblables ORN, CKS, donnent $\overline{ON}^2 . \overline{CS}^2 :: \overline{OR}^2\ (tt - xx + bb - \frac{bbtt}{xx}) . \overline{CK}^2$

* *Art.* 52. * $(tt - xx) :: MO \times Om\ (\frac{xxzz - bbzz}{xx})\ \overline{CM}^2\ (zz)$. Puisqu'en

multipliant les extrêmes & les moyens, on trouve le même produit. Donc $\overline{ON}^2 . MO \times Om :: \overline{CS}^2 . \overline{CM}^2 :: \overline{Ss}^2 . \overline{Mm}^2$. Ce *qu'il falloit*, &c. * Art. 50.

COROLLAIRE GENERAL.

55. IL est visible que ce qu'on a démontré dans la Proposition seconde par rapport aux deux axes *Aa*, *Bb*, s'étend par le moyen de cette Proposition à deux diametres conjugués quelconques *Mm*, *Ss*. Or comme les articles 40, 41, 42, 43, 44, 45, 47, 48 & 49, se tirent de la seconde Proposition, & subsistent également soit que l'angle *ACB* soit droit ou qu'il ne le soit pas, il s'ensuit que si l'on suppose dans ces articles, que les lignes *Aa*, *Bb*, au lieu d'être les deux axes soient deux diametres conjugués quelconques, ils seront encore vrais dans cette supposition : car leur démonstration demeurera toujours la même ; & il ne faut pour s'en convaincre entierement, que les relire en mettant par tout où se trouve le mot d'*Axe* celui de *Diametre*.

COROLLAIRE II.

56. COMME les articles 44 & 49, subsistent avec la même force, lorsque les lignes *Aa*, *Bb*, au lieu d'être les deux axes, sont deux diametres conjugués quelconques, tels que *Mm*, *Ss*, il s'ensuit que la ligne *MT* menée par le point *M* l'une des extremités d'un diametre quelconque *Mm*, parallelement à son diametre conjugués *Ss*, est tangente en *M*, & qu'il n'y a que cette seule ligne qui puisse toucher l'Ellipse en ce point. FIG. XXIII.

D'où l'on voit que d'un point donné sur une Ellipse, on ne peut mener qu'une seule tangente.

COROLLAIRE III.

57. DE-LA il est évident, selon la définition 11e, que si l'on mene par un point quelconque *M* d'une Ellipse, une ordonnée *MP* à l'un ou l'autre axe *Aa* ; & qu'ayant pris *CT* du côté du point *P*, troisiéme proportionnelle à *CP*, *CA*, on tire la droite *MT* : cette ligne *MT* sera tangente en *M*. Et reciproquement, que si la ligne *MT* est tangente en *M*, & qu'on mene l'ordonnée *MP* à l'un ou l'autre axe *Aa*, les par-

ties CP, CA, CT de cet axe, ſeront en proportion geométrique continuë.

COROLLAIRE IV.

58. Si l'on imagine dans les définitions 11, 12 & 13, & dans les deux dernieres Propoſitions, que les lignes Aa, Bb, au lieu d'être les deux axes, ſoient deux diametres conjugués quelconques ; on verra que ces Propoſitions ſeront encore vraies, puiſqu'elles ſe démontreront de la même maniere qu'auparavant : comme il eſt évident par l'inſpection de la figure 23, où les triangles ſemblables donnent les mêmes proportions que dans le cas des axes.

D'où il ſuit 1°. Que le Corollaire précedent doit encore avoir lieu, lorſque la ligne Aa, au lieu d'être un axe, eſt un diametre quelconque. 2°. Que les diametres conjugués Mm, Ss, peuvent être les deux axes dans cette ſuppoſition ; & qu'ainſi on peut regarder les deux axes comme deux diametres conjugués, qui ſont entr'eux des angles droits.

PROPOSITION VII.

Theorême.

59. FIG. XXIV. *Si par un point quelconque d'une Ellipſe qui a pour centre le point* C, *l'on tire une ordonnée* MP *à l'un des axes*, Aa, *& une perpendiculaire* MG *à la tangente* MT *qui paſſe par le point* M : *je dis que* CP *ſera toujours à* PG *en raiſon donnée de l'axe* Aa *à ſon parametre*.

Car nommant le demi-axe CA ou Ca, t ; & les indéterminées CP, x ; PM, y ; on aura * $CT = \frac{tt}{x}$; & partant $PT = \frac{tt-xx}{x}$. Or les triangles rectangles ſemblables TPM, MPG, donnent $TP\ (\frac{tt-xx}{x}).\ PM\ (y) :: PM\ (y).\ PG = \frac{xyy}{tt-xx}$. D'où l'on tire cette proportion $CP\ (x).\ PG\ \frac{xyy}{tt-xx} :: AP \times Pa\ (tt-xx).\ \overline{PM}^2\ (yy)$. Puiſqu'en multipliant les extrêmes & les moyens, on forme le même produit xyy. Mais le rectangle $AP \times Pa$, eſt * au quarré $\overline{PM}^2$, comme l'axe Aa eſt à ſon parametre. Donc &c.

* Art. 37.

PROPOSITION VIII.

Theorême.

60. *Si l'on mene par un point quelconque* M *d'une Ellipse, une tangente* TMS, *& aux deux foyers* F, f, *les droites* MF, Mf, *je dis que les angles* FMT, fMS, *faits par ces lignes de part & d'autre avec la tangente* TMS, *sont égaux entr'eux.* Fig. XXV.

Car ayant mené les perpendiculaires *FD*, *fd*, sur cette tangente; le premier axe *Aa* qui la rencontre en *T*, & l'ordonnée *MP* à cet axe, & nommé les données *CA* ou *Ca*, *t*; *CF* ou *Cf*, *m*; & l'indéterminée *CP*, *x*; on aura $MF * (t - \frac{mx}{t})$. * Art. 38.
$Mf (t + \frac{mx}{t})$ :: *TF*, ou $CT * (\frac{tt}{x}) - CF (m)$. *Tf* ou $CT (\frac{tt}{x})$ * Art. 57.
$+ Cf (m)$. Puisqu'en multipliant les extrêmes & les moyens, on trouve le même produit. Or les triangles semblables *TFD*, *Tfd*, donnent *TF*. *Tf* :: *FD*. *fd*. L'hypothenuse *MF* du triangle rectangle *MDF*, sera donc à l'hypothenuse *Mf* du triangle rectangle *Mdf*, comme le côté *DF* est au côté *df*; & par consequent ces deux triangles seront semblables. Les angles *FMD*, *fMd*, ou *FMT*, *fMS*, qui sont opposés aux côtés homologues *DF*, *df*, seront donc égaux entr'eux. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

61. De-là il est évident que la tangente *TMS* étant prolongée indéfiniment de part & d'autre du point touchant *M*, laisse l'Ellipse toute entiere du côté de ses deux foyers *F*, *f*. Or comme cela arrive toujours en quelque endroit de l'Ellipse que tombe le point *M*, il s'ensuit qu'elle sera concave dans toute son étenduë autour de ses deux foyers, & par consequent aussi autour de son centre.

PROPOSITION IX.

Theorême.

62. *Si l'on mene par l'une des extremités* A *d'un diametre* Aa *une parallele* DAE *à son conjugué* Bb, *laquelle rencontre deux autres diametres conjugués quelconques* Mm, Ss, *aux points* D, Fig. XXVI.

E; *je dis que le rectangle de* DA *par* AE, *est égal au quarré de la moitié* CB *du diametre* Bb.

Il faut prouver que DA × AE = $\overline{CB}^2$.

Ayant mené par les extremités *M*, *S*, des diametres conjugués *Mm*, *Ss*, les ordonnées *MP*, *SK*, au diametre *Aa*, on nommera les données *CA*, *t*; *CB*, *c*; & les indéterminées

*Art. 52. *CP*, *x*; *PM*, *y*; & on aura * $\overline{CK}^2 = AP \times PA = tt - xx$;

*Art. 54. & par consequent $AK \times Ka$ ou $\overline{CA}^2 - \overline{CK}^2 = xx$. Or * $\overline{BC}^2$ (cc). $\overline{CA}^2$ (tt) :: $\overline{MP}^2$ (yy). $AP \times Pa$ ou $\overline{CK}^2 = \frac{ttyy}{cc}$. Et $\overline{CA}^2$ (tt). $\overline{CB}^2$ (cc) :: $AK \times Ka$ (xx). $\overline{KS}^2 = \frac{ccxx}{tt}$. Donc en extrayant les racines quarrées, l'on tire $CK = \frac{ty}{c}$, & $KS = \frac{cx}{t}$. Mais les triangles semblables *CPM*, *CAD*, & *CKS*, *CAE*, donnent CP (x). PM (y) :: CA (t). $AD = \frac{ty}{x}$. Et CK $(\frac{ty}{c})$. KS $(\frac{cx}{t})$ :: CA (t). $AE = \frac{ccx}{ty}$. Donc $DA \times AE = cc = \overline{BC}^2$. *Ce qu'il falloit démontrer*.

PROPOSITION X.

Problême.

63. Fig. XXVII. DEUX *diametres conjugués* Aa, Bb, *d'une Ellipse étant donnés avec une ligne droite* MCm *qui passe par le centre* C; *marquer sur cette ligne les points* M, m, *où elle rencontre l'Ellipse*.

Ayant mené par l'une des extremités *A* du diametre *Aa*, une parallele indéfinie *AD*, à son conjugué *Bb*, laquelle rencontre la ligne *CM* donnée de position au point *D*; on tirera par le point *A* perpendiculairement sur *AD*, la ligne *AO* égale à *CB*, & par les points *O*, *D*, la ligne *OD*. On décrira du rayon *OA* un cercle qui coupera la ligne *OD* en deux points *N*, *n*, par où l'on tirera des paralleles *NM*, *nm*, à la ligne *OC* qui joint les centres de l'Ellipse & du cercle. Je dis que les points *M*, *m*, où elles rencontrent la ligne *CD*, seront à l'Ellipse, & détermineront par consequent les extremités du diametre *MCm* donné de position.

Car menant les paralleles *MP*, *NQ*, à *AD*, qui rencontrent les lignes *CA*, *OA*, aux points *P*, *Q*; les triangles semblables

blables CDO, MDN, & CDA, CMP, & ODA, ONQ, donneront $CA . CP :: CD . CM :: OD . ON :: OA . OQ$. c'est à dire, $CA . CP :: OA . OQ$. Et partant si l'on mene la droite PQ, elle sera parallele à OC; & par consequent aussi à MN supposée parallele à OC. Ainsi les paralleles MP, NQ, seront égales entr'elles. Cela posé, si l'on nomme les données CA, t; CB ou AO ou ON, c; & les indéterminées CP, x; PM ou NQ, y; on aura $CA (t) . CP (x) :: OA (c) . OQ = \frac{cx}{t}$. Et à cause du triangle OQN rectangle en Q, le quarré $\overline{NQ}^2$ ou $\overline{PM}^2 (yy) = \overline{ON}^2 (cc) - \overline{OQ}^2 (\frac{ccxx}{tt})$. La ligne PM sera donc * une ordonnée au diametre Aa; & par consequent le point M appartiendra à l'Ellipse qui a pour diametres conjugués les droites Aa, Bb. Mais à cause des paralleles NM, OC, nm, la ligne Mm est divisée en deux également par le centre C; puisque par la proprieté du cercle, Nn l'est au point O. Donc le point m appartiendra * aussi à la même Ellipse.

* Art. 41.

* Art. 50.

Si les diametres conjugués Aa, Bb, étoient les deux axes, les paralleles CO, PQ, se confondroient alors avec les lignes CA, AO, qui n'en feroient qu'une seule; ce qui rendroit la construction & la démonstration un peu plus faciles.

PROPOSITION XI.

Problême.

64. *DEUX diametres conjugués* Aa, Bb, *d'une Ellipse étant donnés; en trouver les deux axes* Mm, Ss: *& démontrer qu'il n'y en peut avoir que deux.* FIG. XXVII.

Ayant mené par l'une des extremités A du diametre Aa, une parallele DE à son conjugué Bb, on tirera AO perpendiculaire à DE & égale à CB. Ayant joint OC, on menera par son point de milieu F la ligne FG qui la coupe à angles droits, & qui rencontre au point G la ligne DE, sur laquelle on prendra de part & d'autre du point G les parties GD, GE, égales chacune à GO ou GC. Tirant enfin les droites CD, CE; je dis que les deux axes Mm, Ss, sont situés sur ces droites.

Car les deux axes pouvant être regardés * comme deux diametres conjugués, qui font entr'eux un angle droit, ils rencontreront la ligne DE en des points D, E, tels que le cercle décrit de ce diametre passera par les deux points C, O, puis- * Art. 58.

E

* Art. 62. que le rectangle $DA \times AE$ étant égal * au quarré de AO, l'angle DOE sera droit, aussi-bien que l'angle DCE. Or il est évident que c'est précisément ce que l'on vient de faire par le moyen de cette construction; puisque les lignes GO, GC, GE, GD étant toutes égales entr'elles, sont les rayons d'un même cercle. Mais comme il ne peut y avoir sur la ligne DE que deux points D, E, qui satisfassent en même temps à ces deux conditions; sçavoir, que l'angle DCE & l'angle DOE soient chacun droit; il s'ensuit que les diametres conjugués Mm, Ss, qui font entr'eux un angle droit, seront les mêmes que les axes; & qu'il n'y en peut avoir que deux.

Maintenant pour en déterminer la grandeur, il n'y a qu'à tirer les droites OD, OE; & par les points N, R, où elles rencontrent le cercle qui a pour rayon OA, mener les paralle-
* Art. 63. les NM, RS. Car il est évident * que les points M, S, où elles rencontrent les droites CD, CE, appartiendront à l'Ellipse qui a pour diametres conjugués les lignes Aa, Bb; & qu'ainsi ils seront les extremités de ses axes.

COROLLAIRE.

65. Si l'on proposoit de trouver deux diametres conjugués Mm, Ss, qui fissent entr'eux un angle MCS égal à un angle donné, deux autres diametres conjugués Aa, Bb, étant donnés. Il est visible que la question se reduiroit à trouver sur la ligne DE donnée de position, deux points D; E, tels que menant aux deux points O, C, donnés hors cette ligne, les droites DO, OE, CD, CE, l'angle DOE fût droit, & l'angle DCE égal à l'angle donné. Mais comme la solution de ce Problême est assez difficile, on l'a renvoyée dans le 10e Livre, & on a suivi ici une autre voye, qui est plus simple; c'est de trouver d'abord les deux axes, & de s'en servir ensuite pour trouver les deux diametres conjugués qu'on demande, comme l'on va enseigner dans la Proposition suivante.

PROPOSITION XII.

Problême.

66. *LES deux axes* Aa, Bb, *d'une Ellipse étant donnés; trou-*
FIG. XXVIII, XXIX. *ver deux diametres conjugués* Mm, Ss, *qui fassent entr'eux l'angle* MCS *égal à un angle donné.*

Je ſuppoſe que les diametres *Mm*, *Ss*, ſoient en effet ceux qu'on demande, & qu'ils rencontrent aux points *D*, *E*, la ligne droite indéfinie *DE* menée par l'extremité *A* du petit axe *Aa* parallelement au grand *Bb*. Et ayant tiré du centre *C* de l'Ellipſe, la ligne *CF*, qui faſſe avec *DE* au point *F* l'angle *CFE* égal à l'angle donné *MCS*, je nomme les données *CA*, t; *CB*, c; *AF*, a; & l'inconnuë *AE*, z; ce qui donne $AD = * \frac{cc}{z}$, $CE = \sqrt{tt + zz}$ à cauſe du triangle rectangle *CAE*. Cela poſé. * *Art.* 62.

Les triangles *FEC*, *CED*, ſeront ſemblables; puiſque l'angle au point *E* eſt commun, & que l'angle *CFE* a été fait égal à l'angle *MCS* : c'eſt pourquoi *FE* $(z - a)$. *EC* $(\sqrt{tt + zz}$ :: *EC* $(\sqrt{tt + zz}$. *ED* $(z + \frac{cc}{z})$. D'où en multipliant les extrêmes & les moyens, l'on forme l'égalité $zz - az + cc - \frac{acc}{z} = tt + zz$; & effaçant de part & d'autre zz, multipliant enſuite par z, & diviſant par a, il vient $zz - \frac{cc}{a} z + \frac{tt}{a} z + cc = 0$, Et en faiſant (pour faciliter le calcul) $\frac{cc - tt}{a} = 2b$, on changera l'égalité precedente en celle ci $zz - 2bz + cc = 0$, ou $zz - 2bz + bb = bb - cc$ ce qui donne en extrayant de part & d'autre la racine quarré $z - b$ ou $b - z = \sqrt{bb - cc}$, & par conſéquent l'inconnuë *AE* $(z) = b \pm \sqrt{bb - cc}$. Voici maintenant la conſtruction que cette derniere égalité fournit.

Ayant prolongé le petit axe *Aa* juſqu'au point *O*, en ſorte que *AO* ſoit égale à la moitié *CB* du grand; ſoit tirée *CF*, qui faſſe avec *DE* menée par le point *A* parallelement à *Bb*, l'angle *CFE* égal à l'angle donné. Ayant joint *OF*, ſoient tirées les droites *OH*, *CG*, perpendiculaires ſur *OF*, *CF*, qui rencontrent *DE* aux points *H*, *G* (on n'a point marqué dans les figures 28 & 29, les points *H*, *G*, ſur la ligne *DE*; parce que ces figures auroient été trop grandes, & que d'ailleurs il eſt facile de les y imaginer). Soit décrit du centre *O*, & du rayon *OK*, égal à la moitié de *GH*, partie de *AD* prolongée, compriſe entre *G* & *H*, un arc de cercle qui coupe *DE* aux points *K*, *K*, & ayant pris ſur *DE* les parties *KD*, *KE*, égales chacune à *KO*, ſoient tirées par le centre *C* de l'Ellipſe, les droites *DC*, *EC*. Je dis que les diametres cherchés *Mm*, *Ss*, ſont ſitués ſur ces lignes.

Car à cauſe des angles droits *FAC*, *FCG*, & *FAO*, *FOH*, on aura $AG = \frac{tt}{a}$, $AH = \frac{cc}{a}$; & partant $GH = \frac{cc - tt}{a} = 2b$. Le rayon *OK* qui eſt égal à la moitié de *HG*, ſera donc égal à b; & à cauſe du triangle rectangle *OAK*; on aura $AK = \sqrt{bb - cc}$, & *AE* ou $KE \mp AK = b \mp \sqrt{bb - cc}$, & *AD*
± ou $KD \pm AK = b \mp \sqrt{bb - cc}$. Or cela poſé, ſi l'on multiplie la valeur de *AE* par celle de *AD*, il vient $AE \times AD =$
* *Art. 62.* $cc = \overline{CB}^2$; & partant * les diametres *Mm*, *Ss*, ſont conjugués. Mais le rectangle de $AE + AD$ ou *DE* ($2b$) par AE
∓ $- AF$ ou EF ($b \mp \sqrt{bb - cc} - a$) eſt $= 2bb \mp 2b\sqrt{bb - cc} - 2ab = 2bb \mp 2b\sqrt{bb - cc} + tt - cc$ en mettant pour $2ab$ ſa valeur $cc - tt$; & à cauſe du triangle rectangle *CAE* le quarré $\overline{CE}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{CA}^2 = 2bb \mp 2b\sqrt{bb - cc} + tt - cc = DE \times EF$: ce qui donne $FE \,.\, EC :: EC \,.\, ED$. Et partant les triangles *FEC*, *CED*, ſeront ſemblables; puiſqu'ils ont l'angle au point *E* commun, & que leurs côtés autour de cet angle ſont proportionnels. L'angle *MCS* ſera donc égal à l'angle donné *CFE*. C'eſt ce qui reſtoit à démontrer.

Maintenant pour avoir la grandeur *CM*, *CS*, des deux demi-diametres cherchés; il n'y a qu'à tirer les lignes *OD*, *OE*, & mener par les points *N*, *R*, où elles rencontrent le cercle qui a pour rayon *OA*, les paralleles *NM*, *RS*, à *OC*. Car
* *Art. 63.* il eſt viſible * que les points *M*, *S*, où elles rencontrent les droites *CD*, *CE*, ſeront à l'Ellipſe, & détermineront par conſequent les extremités de ces diametres.

COROLLAIRE I.

67. Il ſuit de cette conſtruction, 1°. Qu'afin que le Problême ſoit poſſible, il faut que *OK* ($\frac{cc - tt}{2a}$) ſurpaſſe ou ſoit égale à *AO* (c); car autrement le cercle décrit du rayon *OK*, ne rencontreroit la ligne *DE* en aucun point, ce qui eſt neanmoins neceſſaire pour la conſtruction.

2°. Que lorſque *OK* ſurpaſſe *OA*, on trouve toujours par le moyen des deux points *K*, *K*, deux differens diametres conjugués *Mm*, *Ss*, qui ſatisfont également : mais qu'alors le diametre *Ss* de la figure 29 eſt égal au diametre *Mm* de la figure 28. & ſemblablement poſé de l'autre côté de l'axe

Aa; parceque *AE* de la figure 29. eſt égal à *AD* de la figure 28. Et de même que le diametre *Mm* de la figure 29. eſt égal au diametre *Ss* de la figure 28. & ſemblablement poſé de l'autre côté de l'axe *Aa*; parceque *AD* de la figure 29. eſt égal à *AE* de la figure 28. C'eſt à dire que les deux differens diametres conjugués *Mm*, *Ss*, qui ſatisfont également au Problême, ſont ſemblablement poſés de part & d'autre de l'axe *Aa*, & que dans ces deux differentes poſitions leurs grandeurs demeurent la même.

3°. Que lorſque $OK = OA$, les deux points d'interſection *K*, *K*, ſe réuniſſent au point touchant *A*; & qu'ainſi il n'y a alors qu'à prendre les parties *AE*, *AD*, égales chacune à la moitié *CB* du grand axe: d'où l'on voit qu'il ne peut y avoir alors qu'une ſolution, & que les deux diametres conjugués *Mm*, *Ss*, qui ſatisfont, ſont égaux entr'eux. FIG. XXX.

COROLLAIRE II.

68. IL eſt clair auſſi que plus *AF* (*a*) eſt grande, plus l'angle obtus donné *CFE* l'eſt auſſi, & plus au contraire la ligne *OK* ($\frac{aa-ee}{2a}$) diminuë: de ſorte que *AF* étant la plus grande qu'il eſt poſſible, l'angle obtus *CFE*, ſera auſſi le plus grand; & au contraire la ligne *OK*, ſera la moindre, c'eſt à dire égale à *AO*. Or ſi l'on mene alors les droites *Ba*, *ab*; les triangles rectangles *aCB*, *CAD*. *aCb*, *CAE*, ſeront tous égaux entr'eux; puiſque les lignes *AE*, *AD*, ſont égales chacune à la moitié *CB* ou *Cb* de l'axe *Bb*, & que *CA* eſt égal à *Ca*. L'angle *ACM*, ſera donc égal à l'angle *CaB*, & l'angle *ACS* à l'angle *Cab*; & partant l'angle donné *MCS* ou *CFE*, ſera auſſi égal à l'angle *Bab*. D'où l'on voit: FIG. XXVIII. XXIX. & XXX. FIG. XXX.

1°. Que ſi l'on mene de l'une des extremités *a* du petit axe *Aa* aux extremités *B*, *b*, du grand, les lignes *aB*, *ab*; l'angle obtus donné *CFE*, doit être égal ou moindre que l'angle *Bab*, afin que * le Problême ſoit poſſible. FIG. XXVIII. XXIX. & XXX. * *Art. 67.*

2°. Que lorſqu'il lui eſt égal, comme dans la figure 30. il n'y a que deux diametres conjugués *Mm*, *Ss*, qui ſatisfaſſent, leſquels ſont égaux entr'eux.

3°. Que lorſqu'il eſt moindre, comme dans les fig. 28. & 29. il y à toujours deux differens diametres conjugués qui ſatisfont également; qu'ils ſont ſemblablement poſés de part &

d'autre du petit axe, cet angle demeurant le même entr'eux, & que leur grandeur demeure aussi la même dans ces deux differentes positions.

PROPOSITION XIII.

Problême.

69. *DEUX diametres conjugués* Aa, Bb, *d'une Ellipse étant donnés; la décrire par un mouvement continu.*

PREMIERE MANIERE.

* Art. 64. On cherchera * les deux axes, & on la décrira ensuite selon l'article 36.

SECONDE MANIERE.

FIG. XXXI. & XXXII. Ayant mené par l'une des extremités A de l'un des diametres donnés Aa, une perpendiculaire AH sur l'autre Bb, on prendra sur cette ligne la partie AQ de part ou d'autre du point A égale à CB. Et ayant tiré la ligne CQ, on fera glisser la ligne GF égale à HQ par ses extremités le long des lignes Bb, CQ (prolongées de part & d'autre du centre C autant qu'il sera necessaire) jusqu'à ce qu'après avoir parcouru successivement les quatre angles faits par ces deux lignes, elle revienne dans la même situation d'où elle étoit partie. Je dis que si l'on prend GM égale à AQ, le point M décrira dans ce mouvement l'Ellipse requise.

Car menant GP parallele à QA, qui rencontre en P le diametre Aa, & en O le diametre Bb; les triangles semblables CHQ, COG, & CAQ, CPG, donneront $CQ . CG :: AQ$ ou $GM . GP :: HQ$ ou $GF . GO$. Et par consequent la ligne PM sera parallele au diametre Bb. Cela posé.

Si l'on nomme les données CA, t; AQ ou CB ou Cb, c; & les inconnuës CP, x; PM, y; on aura $CA\,(t) . CP\,(x) :: AQ\,(c) . GP = \frac{cx}{t}$. Et le triangle rectangle GPM donnera $\overline{PM}^2 = \overline{GM}^2 - \overline{GP}^2$, c'est à dire en termes analytiques $yy = cc - \frac{ccxx}{tt}$. La ligne PM sera donc * une ordonnée

* Art. 41. & 35.

au diametre *Aa* dans l'Ellipse qui a pour diametres conjugués les lignes *Aa*, *Bb*. Donc &c.

Si les deux diametres conjugués *Aa*, *Bb*, étoient les deux axes, il est clair que les lignes *AQ*, *CQ*, tomberoient sur le diametre *Aa* qui seroit l'un des axes, & que le point *H* tomberoit sur le centre *C*. D'où l'on voit qu'il faudroit prendre alors *GF* égale à *CQ*, somme ou difference des deux demi axes *CA*, *CB*; & la faire glisser par ses extremités le long des axes *Aa*, *Bb*, prolongés s'il est necessaire. FIG. XXXIII.

Comme les lignes *Aa*, *Bb*, s'entrecoupent à angles droits au point *C*; il est clair qu'en quelque situation que se trouve la droite *GF* pendant qu'elle glisse le long de ces lignes, le cercle qui auroit cette ligne pour diametre, passeroit toujours par le point *C*; & qu'ainsi la ligne *CD* qui passe par le point *D* milieu de *FG*, sera toujours égale à *DF*, puisque les lignes *CD*, *DF*, *DG*, seront toujours des raïons de ce cercle. De-là naît la description suivante.

Soient deux lignes droites *CD*, *DF*, égales chacune à la moitié de *CQ*, somme ou difference des deux demi-axes *CB*, *CA*; attachées l'une à l'autre par leur extremité commune *D*, en sorte qu'elles se puissent mouvoir autour de ce point, comme les jambes d'un compas autour de sa tête. Soit attachée l'extremité *C* de la droite *CD* dans le centre de l'Ellipse; & soit entendue l'extremité *F* de l'autre droite *FD*, se mouvoir le long de l'axe *Bb*, en entraînant avec elle la ligne *DC* mobile autour du point fixe *C*. Il est clair que si l'on prend sur *FD* (prolongée, s'il est necessaire) la partie *FM* égale à *CA*, le point *M* décrira dans ce mouvement l'Ellipse qu'on cherche.

PROPOSITION XIV.

Problême.

70. DEUX *diametres conjugués* Aa, Bb, *d'une Ellipse étant donnés; la décrire par plusieurs points.*

PREMIERE MANIERE.

Ayant mené par l'une des extremités *A* de l'un des diametres donnés *Aa*, une parallele indéfinie *DAD* à son conjugué FIG. XXXIV.

Bb, on tirera *AO* perpendiculaire à *AD*, & égale à la moitié *CB* du diametre *Bb*; on joindra *OC*; & on décrira un cercle du centre *O*, & du rayon *OA*. Cela fait on menera librement de part & d'autre de *CA*, autant de lignes *CD*, *CD*, &c. qu'on voudra; & ayant tiré des points *D*, *D*, &c. où elles rencontrent la ligne *DAD*, au centre *O*, les lignes *DO*, *DO*, &c. qui coupent la circonference du cercle aux points *N*, *N*, &c. on menera des droites *NM*, *NM*, &c. paralleles à *OC*, lesquelles rencontrent aux points *M*, *M*, &c. les droites correspondantes *CD*, *CD*, &c. sur lesquelles on marquera de l'autre côté du centre *C* des points *m*, *m*, &c. qui en soient également éloignés. Il est évi-
* Art. 63. dent * que la ligne courbe qui passera par tous les points *M*, *M*, &c; *m*, *m*, &c. ainsi trouvés, aura pour diametres conjugués les droites *Aa*, *Bb*.

SECONDE MANIE'RE.

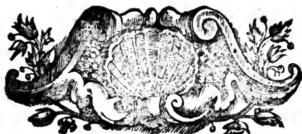
FIG. XXXV. Ayant pris sur l'un des demi diametres *CB*, de petites parties *CE*, *EE*, &c. égales entr'elles, de telle grandeur qu'on voudra, & autant que ce demi-diametre en pourra contenir; on lui menera les perpendiculaires *ED*, *ED*, &c, qui rencontrent la circonference circulaire décrite du centre *C* & du raïon *CB*, aux points *D*, *D*, &c. Ayant joint *AB*, on tirera par celui des points *E*, qui est le plus proche du centre *C*, la ligne *EP* parallele à *AB*, qui rencontre *CA* au point *P*. On prendra sur le diametre *Aa* de part & d'autre du centre *C*, autant de parties *PP*, *PP*, &c. égales à *CP*, qu'il en pourra contenir; & on menera par tous les points *P*, *P*, &c. des paralleles *MPM*, *MPM*, &c. au diametre *Bb*, sur chacune desquelles on prendra de part & d'autre du point *P*, des parties *PM*, *PM*, égales chacune à sa correspondante *ED*. Je dis que la ligne courbe qui passe par tous ces points *M*, sera l'Ellipse qu'on demande.

Car nommant les données *CA*, t; *CB* ou *CD*, c; & les indéterminées *CP*, x; *PM*, y; on aura à cause des triangles semblables *CAB*, *CPE*, cette proportion *CA* (t) *CB* (c) :: *CP* (x). *CE* $= \frac{cx}{t}$. Et à cause du triangle
CED

CED rectangle en E, le quarré $\overline{ED}^2$ ou $\overline{PM}^2$ ($yy = \overline{CD}^2$ (cc) $- \overline{CE}^2$ ($\frac{ccxx}{tt}$)). La ligne PM ſera donc * une ordonnée au diametre Aa. Et comme cette démonſtration convient à toutes les lignes PM; puiſque chaque CP eſt toujours à ſa correſpondante CE, en raiſon de CA à CB: il s'enſuit que la Courbe qui paſſe par tous les points M trouvés comme cy-deſſus, ſera l'Ellipſe qu'on demande.

* Art. 41. & 55.





LIVRE TROISIÉME.

De l'Hyperbole.

DE'FINITIONS.

I.

Fig. XXXVI. 

AYANT attaché fur un plan en un point *f* l'une des extremités d'une longue regle *fMO*, en forte qu'elle puiffe tourner librement autour de ce point fixe *f*, comme centre; on attachera à fon autre extremité *O*, le bout d'un fil *OMF*, dont la longueur doit être moindre que celle de la regle, & duquel l'autre bout fera attaché en un autre point *F*, pris auffi fur ce plan. Maintenant, fi l'on fait tourner la regle *fMO* autour du point fixe *f*, & qu'en même temps l'on fe ferve d'un ftile *M* pour tenir le fil *OMF*, toujours également tendu, & fa partie *MO* toute jointe & comme collée contre le bord de la regle : la ligne courbe *AX* décrite dans ce mouvement, eft une portion d'*Hyperbole*.

Si l'on renverfe la regle de l'autre côté du point *F*, on décrira de la même forte l'autre portion *AZ* de la même Hyperbole.

Mais, fi fans changer la longueur de la regle, ni celle du fil, on attache l'extremité de la regle en *F*, & celle du fil en *f*, on décrira en la même forte une autre ligne courbe *xaz* oppofée à la premiere *XAZ*, qui eft encore appellée *Hyperbole*, & les deux enfemble font nommées *Hyperboles oppofées*.

2.

Les deux points fixes *F*, *f*, font nommés les *Foyers*.

3.

La ligne *Aa*, qui passe par les deux foyers *F*, *f*, & qui est terminée de part & d'autre par les Hyperboles opposées, est appellée le *premier Axe*.

4.

Le point *C*, qui divise par le milieu le premier axe *Aa*, est nommé le *Centre*.

5.

Si l'on mene par le centre *C* une perpendiculaire indéfinie *Bb* au premier axe *Aa*; & que du point *A*, comme centre, & de l'intervalle *CF*, on décrive un arc de cercle qui la coupe aux points *B*, *b*: la partie *Bb* de cette perpendiculaire, est appellée le *second Axe*.

6.

Les deux axes *Aa*, *Bb*, sont appellés ensemble *Conjugués*; de sorte que le premier axe *Aa*, est dit *Conjugué* au second *B b*; & reciproquement le second *B b*, *Conjugué* au premier *Aa*.

7.

Les lignes *MP*, *MK*, menées des points *M* des Hyperboles opposées parallelement à l'un des axes conjugués, & terminées par l'autre, sont appellées *Ordonnées* à cet autre axe. Ainsi *MP* est *Ordonnée* au premier axe *Aa*, & *MK* au second *Bb*.

8.

La troisiéme proportionnelle aux deux axes, est appellée *Parametre* de celui qui est le premier terme de la proportion. Ainsi si l'on fait comme le premier axe *Aa*, est au second axe *Bb*, de même le second axe *Bb*, à une troisiéme proportionnelle *p*; cette ligne *p* sera le Parametre du premier axe *Aa*.

9.

Toutes les lignes qui passent par le centre *C*, sont appellées *Diametres*: ceux qui rencontrent les Hyperboles opposées, *premiers Diametres*, & ceux qui ne les rencontrent point, quoique prolongées à l'infini, *second Diametres*.

10.

Une ligne droite qui ne rencontre une Hyperbole qu'en un seul point, & qui étant continuée de part & d'autre, n'entre

point dedans, mais tombe au dehors, est appellée *Tangente* en ce point.

REMARQUE.

71. On a dit dans la premiere définition que la longueur du fil
FIG. XXXVII. FMO doit être moindre ou plus grande que celle de la regle fMO; dont la raison est que s'il étoit égal à cette regle, le stile M décriroit dans ce mouvement, une ligne dont tous les points M seroient également distants des deux points F, f; puisque retranchant du fil & de la regle, la partie commune MO, les restes MF, Mf, seroient toujours égaux entr'eux. D'où il est visible que cette ligne ne seroit autre qu'une ligne droite indéfinie Bb, menée perpendiculairement à la droite Ff par son point de milieu C.

COROLLAIRE I.

72. Il suit de la définition premiere, que si l'on mene d'un point
FIG. XXXVI. quelconque M, de l'une des Hyperboles opposées, aux deux foyers F, f, les droites MF, Mf; leur difference sera toujours la même. Car elle sera toujours égale à la difference qui se trouve entre la longueur de la regle & celle du fil.

COROLLAIRE II.

73. LORSQUE le point M tombe en A, il est visible que MF devient AF, & que Mf devient Af; & de même lorsque le point M tombe en a, en décrivant l'Hyperbole opposée xaz; il est encore visible que MF devient aF, & que Mf devient af. Donc puisque la difference de ces deux droites est par tout la même, on aura $Af - AF$ ou $Ff - 2AF = aF - af$ ou $Ff - 2af$; & partant $AF = af$. D'où il suit :

1°. Que la distance Ff des foyers, est divisée en deux parties égales par le centre C; puisque $CA + AF$ ou $CF = Ca + af$ ou Cf.

2°. Que la difference des deux droites MF, Mf, est toujours égale au premier axe Aa; puisque dans l'Hyperbole XAZ, on a toujours $Mf - MF = Af - AF$ ou $Af - af$; & que dans son opposée xaz, on a aussi toujours $MF - Mf = aF - af$ ou $aF - AF$.

COROLLAIRE III.

74. IL suit de la définition cinquiéme.

1°. Que le second axe Bb, est divisé en deux parties égales par le centre C; car les triangles rectangles ACB, ACb, seront égaux, puisqu'ils ont des hypothenuses égales AB, Ab, & le côté AC commun.

2°. Que si l'on prend sur le second axe Bb, la partie CE égale à la moitié CA du premier, & qu'on tire l'hypothenuse AE: le second axe Bb sera plus grand, égal, ou moindre que le premier Aa; selon que la droite CF, est plus grande, égale, ou moindre que l'hypothenuse AE; parce que l'hypothenuse Ab, prise égale à CF, se trouvera aussi pour lors plus grande, égale, ou moindre que l'hypothenuse AE.

3°. Que si l'on prend sur le premier axe Aa de part & d'autre du centre C, les parties CF, Cf, égales chacune à l'hypothenuse AB du triangle rectangle CAB, formé par les deux demi-axes CA, CB: les points F, f, seront les deux foyers.

COROLLAIRE IV.

75. LES mêmes choses étant posées, si l'on nomme CF ou AB, m; CA, ou Ca, t; le triangle rectangle ACB, donnera $\overline{BC}^2 = mm - tt$. Or $AF = m - t$, & $Fa = m + t$; & partant $AF \times Fa = mm - tt$. D'où il est évident que le quarré de la moitié CB du second axe Bb, est égal au rectangle de AF par Fa parties du premier axe Aa, prises entre l'un des foyers F, & ses deux extremités, A, a.

COROLLAIRE V.

76. IL sera maintenant facile de décrire les Hyperboles opposées dont les deux axes Aa, Bb, sont donnés, & dont l'on sçait que l'axe Aa doit être le premier. Car ayant trouvé * sur le premier axe Aa, les foyers F, f, on attachera dans le point F, le bout d'un fil FMO, duquel l'autre bout O, sera lié à l'extremité d'une longue regle OMf, mobile sur son autre extremité f autour du foyer f, & dont la lougueur OMf doit * être moindre ou plus grande que la longueur du fil OMF, de la ligne Aa. Ayant ensuite décrit par le moyen de cette regle

* Art. 74.

* Art. 71.

& de ce fil, deux Hyperboles oppoſées XAZ, xaz, comme l'on a enſeigné dans la définition premiere, il eſt évident qu'elles auront pour premier axe, la ligne Aa, & pour ſecond, la ligne Bb. Et c'eſt ce qu'on demandoit.

Plus la regle OMf, ſera longue, & plus les portions des Hyperboles oppoſées, qu'on décrira par le moyen de cette regle, ſeront grandes; de ſorte qu'on les peut augmenter autant que l'on voudra, en augmentant également la longueur de la regle & celle du fil.

PROPOSITION I.

Theorême.

77. *Si l'on mene l'ordonnée* MP *au premier axe* Aa, *& qu'on prenne ſur cet axe prolongé la partie* AD *égale à* MF, *du côté du foyer* F *lorſque le point* M *tombe ſur l'Hyperbole* XAZ, *& du côté du foyer* f *lorſqu'il tombe ſur ſon oppoſée* xaz; *je dis que* CA . CF :: CP . CD.

Ayant nommé comme auparavant les données CA ou Ca, t; CF ou Cf, m; & de plus les indéterminées CP, x; PM, y; & l'inconnuë CD, z; on aura dans le premier cas, AD ou $MF = z - t$, aD ou $Mf = z + t$, $FP = x - m$ ou $m - x$ (ſelon que le point P tombe au deſſous ou au deſſus du foyer F), $Pf = x + m$: & dans le ſecond cas, AD ou $MF = z + t$, aD ou $Mf = z - t$, $FP = x + m$, $Pf = x - m$ ou $m - x$ ſelon que le point P tombe au deſſus ou deſſous du foyer f.

Cela poſé, le triangle rectangle MPF donnera $zz \mp 2tz + tt = yy + xx \mp 2mx + mm$; ſçavoir, $-$ dans le premier, $+$ dans le ſecond; & l'autre triangle rectangle MPf donnera $zz \pm 2tz + tt = yy + xx \pm 2mx + mm$; ſçavoir, $+$ dans le premier, & $-$ dans le ſecond.

Maintenant, ſi l'on retranche par ordre dans le premier cas, chaque membre de la premiere équation de ceux de la ſeconde; & au contraire dans le ſecond cas, chaque membre de la ſeconde de ceux de la premiere, il vient $4tz = 4mx$; d'où l'on tire $CD\ (z) = \frac{mx}{t}$. Donc $CA\ (t) . CF\ (m) :: CP\ (x) . CD\ (z)$. *Ce qu'il falloit, &c.*

COROLLAIRE.

78. Il est évident que si l'on nomme les données CA ou Ca, t ; CF ou Cf, m ; & l'indéterminée CP, x ; on aura toujours $MF = \frac{mx}{t} - t$, & $Mf = \frac{mx}{t} + t$, lorsque le point M tombe sur l'hyperbole XAZ, qui a pour foyer le point F : & qu'au contraire on aura $MF = \frac{mx}{t} + t$, & $Mf = \frac{mx}{t} - t$, lorsque le point M tombe sur son opposée xaz, qui a pour foyer le point f.

PROPOSITION II.

Theorême.

79. *Le quarré d'une ordonnée quelconque* PM, *au premier axe* Aa, *est au rectangle de* AP *par* Pa, *parties de cet axe prolongé, comme le quarré de son conjugué* Bb, *est au quarré du premier axe* Aa.

Il faut prouver que $\overline{PM}^2 . AP \times Pa :: \overline{Bb}^2 . \overline{Aa}^2$.

Les mêmes choses étant posées que dans la Proposition précédente, si l'on met dans l'équation $zz \mp 2tz + tt = yy + xx \mp 2mx + mm$ que l'on a trouvée * par le moyen du triangle rectangle MPF, à la place de z, sa valeur $\frac{mx}{t}$, on formera toujours celle-cy $ttyy = mmxx - mmtt - ttxx + t^4$, laquelle étant réduite à une proportion, donne $\overline{PM}^2$ (yy). $AP \times Pa$ $(xx - tt)$ :: $\overline{BC}^2$ * $(mm - tt)$. $\overline{CA}^2$ (tt) :: $\overline{Bb}^2 . \overline{Aa}^2$. *Ce qu'il falloit démontrer.* * Art. 77. * Art. 75.

COROLLAIRE I.

80. Si l'on mene une ordonnée MK au second axe Bb, lequel j'appelle $2c$; il est clair que $MK = CP$ (x). & que $CK = PM$ (y). Or $\overline{PM}^2$ (yy). $AP \times Pa$ $(xx - tt)$ :: $\overline{Bb}^2$ $(4cc)$. $\overline{Aa}^2$. $(4tt)$. Et partant $4ccxx = 4cctt + 4ttyy$; ce qui donne cette proportion $\overline{MK}^2$ (xx). $\overline{CK}^2 + \overline{CB}^2$ $(yy + cc)$ :: $\overline{Aa}^2$ $(4tt)$. $\overline{Bb}^2$ $(4cc)$.

C'est à dire que le quarré d'une ordonnée quelconque MK

au second axe Bb, est au quarré de CK, joint au quarré de CB moitié du second axe Bb, comme le quarré de son conjugué Aa, est au quarré de ce second axe Bb.

COROLLAIRE II. FONDAMENTAL.

81. Si l'on nomme le premier ou second axe Aa; $2t$; son conjugué Bb, $2c$; son parametre p; chacune de ses ordonnées PM, y; & chacune de ses parties CP, prises entre le centre & les rencontres des ordonnées, x; on aura toujours * $\overline{PM}^2$ (yy). $\overline{CP}^2 \mp \overline{CA}^2$ $(xx \mp tt)$ :: $\overline{Bb}^2$ $(4cc)$. $\overline{Aa}^2$ $(4tt)$ :: p. Aa $(2t)$, puisque selon la définition du parametre Aa $(2t)$. Bb $(2c)$ :: Bb $(2c)$. $p = \frac{4cc}{2t}$. où l'on doit observer que c'est le signe $-$ lorsque l'axe Aa est le premier, & qu'ainsi on peut substituer alors à la place de $\overline{CP}^2 - \overline{CA}^2$, le rectangle $AP \times Pa$ qui lui est égal; & au contraire que c'est le signe $+$ lorsque l'axe Aa est le second. D'où en multipliant d'abord les Extrêmes & les Moyens de la premiere proportion yy. $xx \mp tt$ :: $4cc$. $4tt$. ensuite de l'autre yy. $xx \mp tt$ :: p. $2t$. l'on tire $yy = \frac{ccxx}{tt} \mp cc$, & $yy = \frac{pxx}{2t} \mp \frac{1}{2}pt$. Or comme cette proprieté convient également à tous les points des Hyperboles opposées, & qu'elle en détermine la position par rapport aux axes; il s'ensuit que l'équation $yy = \frac{ccxx}{tt} \mp cc$; ou $yy = \frac{pxx}{2t} \mp \frac{1}{2}pt$, en exprime parfaitement la nature par rapport à ses axes.

Fig. XXXVIII. & XXXIX.

* Art. 79. & 80.

COROLLAIRE III.

82. Si l'on mene deux ordonnées quelconques MP, NQ à l'axe Aa, il est clair que $\overline{MP}^2$. $\overline{NQ}^2$ :: $\overline{CP}^2 \mp \overline{CA}^2$. $\overline{CQ}^2 \mp \overline{CA}^2$. Car $\overline{PM}^2$. $\overline{CP}^2 \mp \overline{CA}^2$ :: $\overline{Bb}^2$. $\overline{Aa}^2$ :: $\overline{NQ}^2$. $\overline{CQ}^2 \mp \overline{CA}^2$. Donc &c.

Il est bon de remarquer encore qu'on peut substituer à la place de $\overline{CP}^2 - \overline{CA}^2$, & $\overline{CQ}^2 - \overline{CA}^2$, les rectangles $AP \times Pa$, $AQ \times Qa$ qui leur sont égaux; ce qu'il faut toujours observer dans la suite.

COROLLAIRE IV.

83. Si l'on mene par un point quelconque P de l'un ou de l'autre axe Aa (prolongé lorſque c'eſt le premier) une parallele MPM à ſon conjugué Bb; elle rencontrera une Hyperbole ou les Hyperboles oppoſées en deux points M, M, également éloignés de part & d'autre du point P, & non en davantage. Car afin que les points M, M, ſoient à une Hyperbole ou aux Hyperboles oppoſées, il faut * que les quarrés de PM (y) priſes de part & d'autre de l'axe Aa, ſoient égaux chacun à la même quantité $\frac{ccxx}{tt} \mp cc$. * Art. 81.

COROLLAIRE V.

84. Il ſuit de ce que $yy = \frac{ccxx}{tt} \mp cc$, que plus CP (x) priſe de part ou d'autre du centre C, devient grande plus auſſi chaque ordonnée PM (y) priſe de part & d'autre de l'axe Aa, augmente, & cela à l'infini; & qu'au contraire plus CP (x) devient petite, plus auſſi PM (y) diminuë; de ſorte que (*fig.* 38.) CP (x) étant égale à CA ou Ca (t) lorſque l'axe Aa, eſt le premier, PM (y) devient alors nulle ou zero; & que (*fig.* 39) CP (x) étant nulle ou zero, lorſque l'axe Aa eſt le ſecond, chaque PM (y) qui devient alors CB ou Cb (c), eſt la moindre de toutes les ordonnées PM (y) priſes de part & d'autre du centre. D'où il eſt clair: FIG. XXXVIII. & XXXIX.

1°. Que ſi l'on mene (*fig.* 39) par les extremités B, b, du premier axe Bb, des paralleles au ſecond axe Aa; elles ſeront tangentes en ces points.

2°. Que les Hyperboles oppoſées s'éloignent de part & d'autre de plus en plus à l'infini de leurs axes conjugués, en commençant par les extremités du premier: avec cette difference neanmoins que le premier axe rencontre chacune des Hyperboles oppoſées en un point, & qu'étant prolongé il paſſe au dedans; au lieu que le ſecond tombe tout entier entre les Hyperboles oppoſées, & ne les rencontre jamais, quoique prolongé à l'infini.

COROLLAIRE VI.

85. Il ſuit encore de ce que $yy = \frac{ccxx}{tt} \mp cc$, que ſi l'on prend les points P, P, également éloignés de part & d'autre du cen-

tre *C*, les ordonnées *PM*, *PM*, ſeront égales. D'où il eſt clair que ſi une ligne droite *MM*, terminée par une Hyperbole ou par des Hyperboles oppoſées, eſt coupée en deux également par un axe *Bb* en un point *K* autre que le centre, elle ſera parallele à ſon conjugué *Aa*. Car menant des paralleles *MP*, *MP*, à l'axe *Bb*, la ligne *PP*, ſera coupée par le milieu en *C*, puiſque *MM* l'eſt en *K*; & partant les ordonnées *PM*, *PM*, ſeront égales. La droite *MM* ſera donc parallele à l'axe *Aa*.

COROLLAIRE VII.

86. Si l'on conçoit que le plan ſur lequel les Hyperboles oppoſées ſont tracées, ſoit plié le long de l'axe *Aa*, en ſorte que ſes deux parties ſe joignent; il eſt clair (*fig.* 39.) lorſque l'axe *Aa* eſt le ſecond, que les deux Hyperboles oppoſées tomberont exactement l'une ſur l'autre; ſçavoir les points *B*, *M*, &c. ſur
*Art. 83. les points *b*, *M*, &c. puiſque * toutes les perpendiculaires *Bb*, *MM* à cet axe, ſont coupées par le milieu aux points *C*, *P*, &c.

Par la même raiſon (*fig.* 38.) lorſque l'axe *Aa* eſt le premier, les portions des Hyperboles oppoſées qui ſont de part & d'autre de cet axe, tomberont exactement l'une ſur l'autre.

AVERTISSEMENT.

On a ſuivi juſqu'ici la même methode que dans l'Ellipſe, & on auroit pû la continuer juſqu'à la fin; mais comme il faut néceſſairement parler de certaines lignes particulieres à l'Hyperbole, & qu'on peut par leur moïen prouver les mêmes choſes d'une maniere plus aiſée, on a pris ce dernier parti.

DE'FINITIONS.

II.

FIG. XL. Si l'on mene du centre *C* deux droites indéfinies *CG*, *Cg*, paralleles aux lignes *Ab*, *AB*, menées de l'extremité *A* du premier axe *Aa*, aux deux extremités *B*, *b*, du ſecond; ces deux droites ſeront appellées les *Aſymptotes* de l'Hyperbole *MAM*; & ſi on les prolonge indéfiniment de l'autre côté du centre, elles ſeront nommées les *Aſymptotes* de l'Hyperbole oppoſée *MaM*.

12.

Le quarré de la partie *CG*, ou *Cg*, d'une asymptote, comprise entre le centre *C*, & la rencontre de la ligne *AB*, ou *Ab*, menée de l'extremité *A* du premier axe, à l'extremité *B*, ou *b*, du second, est appellée la *Puissance* de l'Hyperbole *MAM*, ou de son opposée *MaM*.

COROLLAIRE I.

87. Il est évident que l'angle *GCg*, fait par les asymptotes d'une Hyperbole, ou son égal *BAb*, est moindre, égal, ou plus grand qu'un droit, selon que le second axe *Bb* est moindre, égal, ou plus grand que le premier *Aa*. Car lorsque le premier axe *Aa* surpasse le second *Bb*, sa moitié *CA*, surpasse la moitié *CB* du second; & par conséquent dans le triangle rectangle *CAB*, l'angle *CAB* est moindre qu'un demi droit. Les deux angles égaux *CAB*, *CAb*, qui font ensemble l'angle *BAb*, seront donc moindres qu'un droit. Les deux autres cas se démontrent de la même maniére.

COROLLAIRE II.

88. A CAUSE des triangles semblables *BAb*, *BGC*, il est clair que la ligne *AB* est divisée par l'asymptote *CG* en deux parties égales au point *G*, & que *CG* est la moitié de *AB*; puisque *BC* est la moitié de *Bb*. On prouvera de même que *Ab* est divisée par l'asymptote *Cg* en deux parties égales au point *g*, & que *Cg* est la moitié de *Ab*. Donc toutes les lignes *CG*, *GA*, *GB*, *Cg*, *gA*, *gb*, sont égales entr'elles; puisqu'elles sont égales chacune à la moitié de l'une ou l'autre des lignes *AB*, *Ab*, que l'on sçait être égales entr'elles, suivant la définition 5[e].

COROLLAIRE III.

89. La puissance d'une Hyperbole est égale à la quatriéme partie de la somme des quarrés des deux demi-axes. Car nommant *CA*, t; *CB*, c; *CG*, m; on aura * $BA = 2m$, & à cause du triangle rectangle *ACB*, le quarré $\overline{AB}^2$ $(4mm) = tt + cc$. Et par consequent $\overline{CG}^2$ $(mm) = \frac{tt+cc}{4}$. * *Art.* 88.

PROPOSITION III.

Theorême.

90. *Si l'on mene par un point quelconque* M *de l'une ou de l'autre des Hyperboles opposées, une ligne droite* Rr *perpendiculaire au premier axe* Aa *qu'elle rencontre en* P, *& terminée par les asymptotes en* R *&* r *; je dis que le rectangle de* RM *par* Mr, *est égal au quarré de* BC, *moitié du second axe* Bb.

Fig. XL.

Il faut prouver que $RM \times Mr = \overline{BC}^2$.

Nommant les connuës CA, t; CB, c; & les indéterminées CP, x; PM, y; les triangles semblables ACB, CPr, & ACb, CPR, donnent $CA\,(t) \cdot CB$ ou $Cb\,(c) :: CP\,(x) \cdot Pr$, ou $PR = \frac{cx}{t}$. Donc RM, ou $PR \pm PM = \frac{cx}{t} \pm y$; & Mr, ou $Pr \mp PM = \frac{cx}{t} \mp y$. Et par conséquent $RM \times Mr = \frac{ccxx}{tt} - yy = \overline{BC}^2\,(cc)$ en mettant pour yy sa valeur * $\frac{ccxx}{tt} - cc$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* Art. 81.

COROLLAIRE I.

91. Il est clair que $\overline{PM}^2$ $\frac{ccxx}{tt} - cc)$ est toujours moindre que $\overline{PR}^2$ ou $\overline{Pr}^2$ $(\frac{ccxx}{tt})$; Et par conséquent que tous les points des Hyperboles opposées tombent dans les angles faits par leurs asymptotes; de sorte qu'il n'en peut tomber aucun dans les angles d'à côté.

COROLLAIRE II.

92. Si l'on mene par deux points quelconques M, N, d'une Hyperbole ou des Hyperboles opposées, deux lignes droites Rr, Kk, perpendiculaires au premier axe, & terminées par les asymptotes: il est évident que les rectangles $RM \times Mr$, $KN \times Nk$, seront toujours égaux entr'eux; puisqu'ils sont égaux chacun au quarré de la moitié BC du second axe Bb. D'où l'on voit que $RM \cdot KN :: Nk \cdot Mr$.

PROPOSITION IV.

Theorême.

93. *Si l'on mene par deux points quelconques* M, N, *d'une Hyperbole ou des Hyperboles opposées, deux droites* Hh, Ll, *paralleles entr'elles, & terminées par les asymptotes; je dis que les rectangles* HM × Mh, LN × Nl *seront égaux entr'eux.*

Il faut prouver que HM × Mh = LN × Nl.

Ayant mené les droites *Rr*, *Kk*, perpendiculaires au premier axe *Aa*, il est clair que les triangles *MRH*, *NKL*, & *Mrh*, *Nkl*, sont semblables; puisqu'ils sont formés par des paralleles. On aura donc *RM*. *KN* :: *HM* : *LN*. Et *Nk*. *Mr* :: *Nl*. *Mh*. Or * *RM*. *KN* :: *Nk*. *Mr*. Donc *HM*. *LN* :: *Nl*. *Mh*. Et par conséquent *HM* × *Mh* = *LN* × *Nl*. *Ce qu'il falloit démontrer.* * Art. 92.

COROLLAIRE I.

94. Si l'on suppose que la ligne *NL* parallele à *MH*, passe par le centre *C*, c'est à dire, qu'elle devienne *CE* : il est clair que les deux points *L*, *l*, se reuniront au centre *C*; & partant que le rectangle *LN* × *Nl*, deviendra le quarré $\overline{EC}^2$. D'où l'on voit que si l'on mene d'un point quelconque *E*, de l'une des Hyperboles opposées au centre *C*, la droite *CE*, & par un autre point quelconque *M* de l'une ou de l'autre de ces Hyperboles, une ligne *MHh*, parallele à *CE*, & qui rencontre les asymptotes en *H* & *h*; le quarré de *CE* sera égal au rectangle de *HM* par *Mh*.

COROLLAIRE II.

95. Si l'on mene par un point quelconque *N*, de l'une des Hyperboles opposées, une ligne droite *Ll*, terminée par les asymptotes, & qui rencontre l'une ou l'autre de ces Hyperboles en un autre point *n*; les parties *LN*, *ln*, de cette droite prises entre les points des Hyperboles & la rencontre des asymptotes, seront égales entr'elles. Car nommant *LN*, *a*; *Nn*, *b*; *nl*, *c*; on aura *LN* × *Nl* ($ab \mp ac$) = *HM* × *Mh* = *Ln* × *nl*. ($bc \mp ac$), d'où l'on tire *LN* (*a*) = *ln* (*c*).

COROLLAIRE III.

96. Si l'on suppose dans le Corollaire précedent que la ligne *Nn*, terminée par les Hyperboles opposées, passe par le centre *C*, c'est à dire, qu'elle devienne le premier diametre *ED*: il est évident que les deux points *L*, *l*, se reuniront au centre *C*; & qu'ainsi *NL* deviendra *EC*, & *nl*, *CD*. D'où l'on voit que tout premier diametre *DE*, est divisé en deux également par le centre *C*.

COROLLAIRE IV.

97. Si deux lignes droites *Mm*, *Nn*, paralleles entr'elles, sont terminées par une Hyperbole ou par les Hyperboles opposées, & rencontrent une asymptote aux points *H*, *L*; je dis que les rectangles $MH \times Hm$, $NL \times Ln$, seront égaux entr'eux. Car prolongeant, s'il est necessaire, ces deux lignes, jusqu'à ce qu'elles rencontrent l'autre asymptote aux points *h*, *l*; les parties *MH*, *mh*, & *NL*, *nl*, seront égales * entr'elles: & partant, puisque $HM \times Mh = LN \times Nl$, il s'ensuit que $MH \times Hm = NL \times Ln$.

* Art. 95.

PROPOSITION V.

Theorême.

98. *Si l'on mene par deux points quelconques* M, N, *d'une Hyperbole ou des Hyperboles opposées deux droites* MH, NL, *paralleles entr'elles & terminées par une asymptote; & deux autres droites* Mh, Nl, *aussi paralleles entr'elles, & terminées par l'autre asymptote; je dis que les rectangles* $HM \times Mh$, $NL \times Nl$, *sont égaux entr'eux.*

FIG. XLI.

Cette Proposition se prouve de la même maniere que la précedente, & il n'y a rien à changer dans la démonstration.

COROLLAIRE I.

99. Si les droites *MH*, *Mh*, & *NL*, *Nl*, sont paralleles aux deux asymptotes; il est clair que les parallelogrammes *MHCh*, *NLCl*, aussi bien que les triangles *CHM*, *CLN*, qui en sont les moitiés, sont égaux entr'eux; puisque les côtés de ces parallelogrammes autour des angles égaux *HMh*, *LNl*, sont réciproquement proportionnels.

FIG. XLII.

COROLLAIRE II.

100. LES mêmes choses étant posées que dans le Corollaire précedent, il est visible que $CH \times HM = CL \times LN$; puisque dans cette supposition $Mb = CH$, & $Nl = CL$: c'est à dire, que si l'on mene par deux points quelconques M, N, de l'une, ou des Hyperboles opposées, deux droites MH, NL, paralleles à l'une des asymptotes, & terminées par l'autre; les rectangles $CH \times HM$, $CL \times NL$, seront toujours égaux entr'eux; & qu'ainsi $CH . CL :: LN . MH$.

COROLLAIRE III.

101. PUISQUE l'extremité A du premier axe, est un des points de l'Hyperbole, & que la ligne AB, qui coupe en G, l'asymptote CG, est parallele à l'autre asymptote Cg; il s'ensuit * que le rectangle $CH \times HM$ sera toujours égal au même rectangle $CG \times GA$, ou * au quarré $\overline{CG}^2$, c'est à dire, selon la définition 12e, à la puissance de l'Hyperbole. Si donc l'on nomme la donnée CG, m; & les indéterminées CH, x; HM, y; on aura toujours $CH \times HM\ (xy) = \overline{CG}^2\ (mm)$. Or comme cette proprieté convient également à tous les points des Hyperboles opposées, & qu'elle en détermine la position par rapport à ses asymptotes; il s'ensuit que l'équation $xy = mm$ en exprime parfaitement la nature par rapport à ses asymptotes.

* Art. 100.
* Art. 88.

COROLLAIRE IV.

102. IL suit de ce que $(y) = \frac{mm}{x}$, que plus $CH\ (x)$ augmente, plus au contraire $HM\ (y)$ diminuë; de sorte que $CH\ (x)$ étant infiniment grande, $HM\ (y)$ sera alors infiniment petite, c'est à dire, nulle ou zero. D'où l'on voit que l'Hyperbole AM, & son asymptote CH (étant prolongées) s'approchent de plus en plus, de sorte qu'enfin leur distance devient moindre qu'aucune donnée; & que cependant elles ne se peuvent jamais rencontrer, puisqu'elles ne se joignent que dans l'infini où l'on ne peut jamais arriver. Il en est de même pour l'autre asymptote Cg.

COROLLAIRE V.

103. ENTRE toutes les lignes qui paſſent par le centre *C*, 1°. Celles qui, comme *Aa*, tombent dans les angles faits par les aſymptotes du côté des Hyperboles, rencontrent chacune des Hyperboles oppoſées en un ſeul point *A*, ou *a*; & étant prolongées, elles paſſent au dedans de ces Hyperboles. Car à cauſe des angles *GCA*, *gCA*, & de leurs oppoſées au ſommet, il eſt clair que la ligne *Aa*, s'éloigne de plus en plus de l'une & de l'autre aſymptote; au lieu que les Hyperbo-
* Art. 102. les oppoſées s'en approchent toujours * de plus en plus. 2°. Celles qui, comme *Bb*, tombent dans les angles d'à côté, faits auſſi par les aſymptotes, ne peuvent jamais rencontrer les Hyperboles oppoſées, quoiqu'on les prolonge à l'infini;
* Art. 91. puiſqu'aucun des points des Hyperboles * ne peut tomber dans ces angles.

* Def. 9. D'où l'on voit * que tous les premiers diametres, tombent dans les angles faits par les Aſymptotes du côté des Hyperboles, & que les ſeconds tombent dans les angles d'à côté.

COROLLAIRE VI.

104. SI l'on mene par un point quelconque *H*, de l'une des aſym-
FIG. XLIII. ptotes *CE*, une parallele *HM*, à l'autre *Ce*; elle ne rencontrera l'Hyperbole qu'en un ſeul point *M*; & étant continuée, elle paſſera au dedans. Car ſa diſtance de *Ce*, demeure par
* Art. 102. tout la même, au lieu que l'Hyperbole s'en approche * toujours de plus en plus.

COROLLAIRE VII.

105. DE-LA il eſt évident que ſi par un point quelconque *M*, d'une Hyperbole, l'on mene deux droites indéfinies *MH*, *Mb*, paralleles à ſes aſymptotes *Ce*, *CE*.

1°. Tous les points de l'Hyperbole qui lui eſt oppoſée, tom-
* Art. 91. beront dans l'angle *HMb*; puiſqu'ils tombent tous * dans l'angle fait par ſes aſymptotes, lequel eſt renfermé dans l'angle *HMb*.

2°. Les deux portions de l'Hyperbole, tomberont dans les deux angles à côté de celui-ci; ainſi aucun de ſes points ne tombera dans l'angle oppoſé au ſommet à l'angle *HMb*.

3°. Toutes

3°. Toutes les lignes qui, comme MF, tombent dans l'angle HMb, rencontrent (étant prolongées du côté de F) l'Hyperbole opposée en un point N, & passent au dedans; puisqu'elles s'écartent de plus en plus des droites MH, Mb, & par consequent de ses deux asymptotes qui leur sont paralleles : mais étant prolongées de l'autre côté du point M, elles entrent au dedans de l'Hyperbole qui passe par ce point, & ne la rencontrent jamais ailleurs.

4°. Toutes les lignes qui, comme Ee, tombent dans les angles à côté de l'angle HMb, rencontrent les deux asymptotes de l'Hyperbole qui passe par le point M; ainsi lorsqu'elles passent au dedans de l'une de ses portions, elles la rencontrent necessairement en quelque point N, puisqu'elles vont rencontrer l'asymptote qui tombe au dehors de cette portion.

COROLLAIRE VIII.

106. Si l'on mene par un point quelconque M, d'une Hyperbole, une ligne droite Ff, qui rencontre l'une de ses asymptotes au point F, & l'une des asymptotes de l'Hyperbole opposée au point f; & qu'on la prolonge en N, en sorte que fN, soit égale à FM: je dis que le point N, sera à l'Hyperbole opposée. Car la ligne Ff, tombe dans l'angle HMb, & rencontre par consequent l'Hyperbole opposée en quelque point N, comme l'on vient de démontrer dans le Corollaire précedent. Donc * &c. *Art. 95.

2°. Si l'on mene par un point quelconque M, d'une Hyperbole, une ligne droite Ee, terminée par ses asymptotes, & qu'on prenne sur cette ligne, la partie eN, égale à EM : je dis que le point N, sera encore l'un des points de cette Hyperbole. Car menant MH, parallele à l'asymptote Ce, & terminée par l'autre en H, si l'on prend sur cette autre asymptote, la partie CL, égale à HE, & qu'on tire LN, parallele à HM; on a démontré dans l'article 104 qu'elle rencontrera l'Hyperbole en un point N, & dans l'article 100. que ce point sera tel que CL ou HE . HM :: CH ou EL . LN; d'où l'on voit que la ligne LN, rencontre l'Hyperbole dans le même point où elle rencontre la droite Ee. Mais à cause des paralleles HM, LN, il est clair que $eN = EM$, puisque $CL = HE$. Donc &c.

PROPOSITION VI.

Problême.

107. *D'UN point donné* M, *sur une Hyperbole dont les asymptotes* CE, Ce, *sont données; mener la tangente* DMd; *& démontrer qu'on n'en peut mener qu'une seule.*

FIG. XLIII.

Ayant mené du point donné *M*, une parallele *MH*, à l'une des asymptotes *Ce*, & terminée par l'autre *CE*, au point *H*; on prendra sur cette asymptote, la partie *HD* égale à *HC*; on tirera par le point donné *M*, la droite *DM*, qui rencontre l'asymptote *Ce* en un point *d*. Je dis en premier lieu, que cette ligne *DMd*, touchera l'hyperbole au point *M*.

Car à cause des triangles semblables *CDd*, *HDM*, la ligne *Dd*, terminée par les asymptotes, est divisée en deux parties égales par le point *M*, de même que *CD*, l'est en *H*. Or s'il étoit possible qu'elle rencontrât l'Hyperbole en un autre point
*Art. 95. *O*, il est clair que *Od*, seroit * égale à *MD*, & par conséquent à *Md*, c'est à dire, la partie au tout; ce qui ne pouvant être, il s'ensuit que la ligne *DMd*, ne peut rencontrer l'Hyperbole, qu'au seul point *M*. De plus, si elle passoit au dedans, comme la ligne *Ee*, il est visible qu'elle rencontreroit la portion de l'Hyperbole, au dedans de laquelle elle passeroit en quelque point *N*, puisqu'elle iroit, rencontrer en un point *e*,
*Art. 93. l'asymptote *Ce*, qui tombe * au dehors de cette portion. Il est donc évident que la ligne *Dd*, ne rencontre l'Hyperbole qu'au seul point *M*, & qu'elle n'entre point au dedans; c'est à dire, qu'elle est tangente en ce point.

Je dis en second lieu, qu'il n'y a que la seule ligne *DMd*, qui puisse toucher l'Hyperbole au point *M*; car si l'on prend sur l'asymptote *CE*, la partie *HE*, plus grande ou moindre que *HD*, & qu'on tire par le point donné *M*, la droite *EM*, qui rencontre l'autre asymptote *Ce*, au point *e*, il est clair à cause des paralleles *MH*, *Ce*, que *ME* sera plus grande ou moindre que *Me*; puisque *HE* a été prise plus grande ou moindre que *HD* ou que *HC*. Or cela posé, si l'on prend sur la plus grande partie *Me*, le point *N*, en sorte que *Ne* soit éga-
*Art. 106. le à *ME*, il est évident que ce point * sera encore à l'Hyperbole, & qu'ainsi la ligne *Ee*, ne la touchera point au point *M*. Ce qui restoit à démontrer.

REMARQUE.

108. On a démontré dans l'art. 102. que plus CH devient grande, plus au contraire HM diminuë ; de sorte que CH étant infiniment grande, HM devient infiniment petite, c'est à dire, nulle ou zero. Or CH étant infiniment grande, HD (qui lui est égale) la sera aussi ; & par consequent les lignes MD, HD, qui ne se rencontrent que dans l'infini, pouvant être regardées comme paralleles, tomberont l'une sur l'autre ; puisque le point M se confond alors avec le point H : c'est à dire, que l'asymptote CE étant prolongée à l'infini, aussi-bien que l'Hyperbole, peut être regardée comme une ligne qui la touche dans son extremité. Il en est de même de l'autre asymptote Ce, laquelle peut être regardée comme touchant la même Hyperbole dans son autre extremité.

D'où l'on voit que les deux asymptotes peuvent être regardées comme des tangentes infinies, qui touchent les Hyperboles opposées dans leurs extremités.

COROLLAIRE I.

109. Comme il n'y a que la seule ligne DMd, laquelle étant terminée par les asymptotes, soit coupée en deux parties égales au point M ; il s'ensuit que si une ligne droite DMd, terminée par les asymptotes d'une Hyperbole, la rencontre en un point M, qui coupe cette ligne droite en deux parties égales ; elle sera tangente de cette Hyperbole en ce point. Et réciproquement que si une ligne droite DMd, terminée par les asymptotes d'une Hyperbole, la touche en un point M ; elle sera coupée en deux parties égales par ce point.

COROLLAIRE II.

110. Si par le point touchant M d'une tangente quelconque DMd, FIG. XLIV.
terminée par les asymptotes CL, Cl, d'une Hyperbole, l'on mene un premier diametre MCm ; & que par le point m, où il rencontre l'Hyperbole opposée, l'on tire une parallele Ee, à la tangente Dd, terminée par les asymptotes aux points E, e : je dis que cette ligne sera tangente au point m. Car les triangles CMD, CmE, seront semblables & égaux, puisque * MC est égal à Cm. La ligne mE, sera donc égale à MD. * Art. 96.

On prouvera de même (à cause des triangles semblables & égaux *CMd*, *Cme*) que *me* est égale à *Md*. C'est pourquoi la ligne *Ee* est divisée en deux également au point *m*; puis-
* *Art.* 109. que *Dd* l'est au point *M*. Et par conséquent * elle sera tangente en *m*.

D'où l'on voit que les tangentes *Dd*, *Ee*, qui passent par les extremités d'un premier diametre quelconque *Mm*, sont paralleles entr'elles; & de plus égales, lorsqu'elles sont terminées par les asymptotes.

DÉFINITIONS.

13.

FIG. XLIV. S'il y a deux diametres *Mm*, *Ss*, dont l'un *Ss*, soit parallele aux tangentes qui passent par les extremités de l'autre *Mm*; & de plus terminé en *S*, *s*, par les droites *MS*; *Ms*, menées de l'une des extremités *M* du diametre *Mm*, parallelement aux asymptotes : ces deux diametres *Mm*, *Ss*, seront appellés ensemble *Conjugués*.

14.

Les lignes droites menées des points des Hyperboles opposées parallelement à l'un des diametres conjugués, & terminés par l'autre, sont nommées *Ordonnées* à cet autre. Ainsi *NO*, est une ordonnée au diametre *Mm*.

15.

Si l'on prend une troisiéme proportionnelle à deux diametres conjugués, elle sera le *Parametre* de celui qui est le premier terme de la proportion.

COROLLAIRE I.

111. LA définition 13ᵉ convient aux deux axes; puisque selon l'article 84. le second axe est parallele aux tangentes qui passent par l'extremité du premier; & que de plus, selon la définition 11ᵉ, il est terminé par deux droites menées de l'une des extremités du premier axe, parallelement aux asymptotes. D'où l'on voit que les deux axes peuvent être regardés comme deux diametres conjugués qui font entr'eux des angles droits.

COROLLAIRE II.

112. COMME le diametre *SCs*, est parallele à la tangente *DMd*, qui passe par l'une des extremités *M* du diametre *MCm*, & que cette tangente rencontre les deux asymptotes *CD*, *Cd*, de l'Hyperbole, qui passe par le point *M*: il s'ensuit qu'il tombe dans les angles à côté de l'angle *DCd*, fait par les asymptotes de cette Hyperbole; Et qu'ainsi c'est un second diametre.

D'où l'on voit qu'entre deux diametres conjugués *MCm*, *SCs*; il y en a toujours un premier *Mm*, & un second *Ss*.

COROLLAIRE III.

113. LE second diametre *SCs*, est coupé par le milieu au centre *C*, & de plus égal à la tangente *DMd*, qui passant par l'une des extremités *M* du premier diametre *Mm*, qui lui est conjugué, est terminée par les asymptotes. Car à cause des paralleles *MS*, *Cd*, & *Ms*, *CD*; il est clair que *CS* est égale à *Md*, & *Cs* à *MD*. Or *DMd*, est divisée * en deux parties égales au point touchant *M*. Donc &c. * *Art.* 109.

COROLLAIRE IV.

114. DEUX diametres conjugués *Mm*, *Ss*, étant donnés, & sçachant lequel des deux est premier diametre; il ne faut pour avoir les asymptotes *CD*, *Cd*, que tirer par le centre *C*, des paralleles aux deux droites *MS*, *Ms*, menées de l'une des extremités *M*, du premier diametre *Mm*, aux deux extremités *S*, *s*, du second.

Et réciproquement les deux asymptotes *CD*, *Cd*, d'une Hyperbole étant données, avec l'un de ses points *M*; il ne faut pour avoir deux de ces diametres conjugués *MCm*, *SCs*, que tirer *MH* parallele à l'une des asymptotes *Cd*, qui rencontre l'autre asymptote *CD* en *H*; l'ayant prolongée en *S*, en sorte que *HS* soit égale à *HM*, mener les droites *CM*, *CS*. Car tirant *MD* parallele à *CS*, il est clair à cause des triangles semblables *CHS*, *MHD*, que *HD* est égale à *HC*; puisque *MH* est égale à *HS*; & qu'ainsi * *MD* est tangente en *M*: d'où il suit selon la définition 13e, que les lignes *CM*, *CS*, sont deux demi-diametres conjugués. * *Art.* 107.

Il eſt donc évident que deux diametres conjugués *Mm*, *Ss*, étant donnés de poſition & de grandeur, & ſçachant de plus lequel des deux eſt un premier diametre; on a les deux aſymptotes *CD*, *Cd*; avec l'un des points *M*, de l'une des Hyperboles oppoſées.

Et réciproquement que les aſymptotes *CD*, *Cd*, d'une Hyperbole étant données, avec un de ſes points *M*; on a deux de ſes diametres conjugués *Mm*, *Ss*, de poſition & de grandeur; & l'on ſçait lequel des deux eſt un premier diametre; ſçavoir, celui qui paſſe par le point donné *M*.

COROLLAIRE V.

115. UN ſecond diametre *SCs*, étant donné de poſition, pour en déterminer la grandeur, & trouver le premier diametre *Mm*, qui lui eſt conjugué; on lui menera par tout où l'on voudra au dedans de l'angle fait par les aſymptotes, une parallele *Ll*, terminée par les aſymptotes en *L*, *l*; & par ſon point de milieu *O*, le premier diametre *CO*, qui rencontrera l'Hyperbole en un point *M*; par lequel ayant tiré les droites *MS*, *Ms*, paralleles aux aſymptotes; il eſt clair, ſelon la definition 13ᵉ, que les points *S*, *s*, où elles rencontrent le ſecond diametre *SCs*, donné de poſition; en déterminent la grandeur, & que le premier diametre *MCm* lui eſt conjugué. Car menant par le point *M*, la ligne *Dd*, parallele à *Ll*, & terminée par les aſymptotes, elle ſera coupée en deux également au point *M*; puiſque *Ll*, l'eſt au point *O*: & partant
* *Art.* 109. * elle ſera tangente en *M*.

De-là, il eſt évident qu'un ſecond diametre *SCs*, étant donné de poſition, ſa grandeur eſt determinée en ſorte qu'il ne peut en avoir qu'une ſeule; comme auſſi la grandeur & la poſition du premier diametre *Mm*, qui lui eſt conjugué.

COROLLAIRE VI.

116. UN ſecond diametre *SCs*, étant donné de poſition & de grandeur, avec ſon parametre, & la poſition de ſes ordonnées; il ſera facile de trouver de poſition & de grandeur le premier diametre *MCm*, qui lui eſt conjugué, avec ſon parametre. Car ayant mené par le centre *C*, une parallele indefinie aux ordonnées du diametre *Ss*, on marquera ſur cette li-

gne deux points M, m, également éloignés de part & d'autre du centre C, en sorte que Mm, soit égale à la moyenne proportionnelle entre le second diametre Ss, & son parametre. Puis ayant trouvé une troisiéme proportionnelle aux deux lignes Mm, Ss, il est clair, selon les definitions 14 & 15, que Mm, sera le premier diametre conjugué au diametre Ss, & qu'il aura pour son parametre cette troisiéme proportionnelle.

PROPOSITION VII.

Theorême.

117. *LE quarré d'une ordonnée quelconque* ON, *au premier diametre* Mm, *est au rectangle de* MO *par* Om, *parties de ce diametre prolongé; comme le quarré de son conjugué* Ss, *est au quarré de ce premier diametre* Mm. FIG. XLIV.

Il faut prouver que $\overline{ON}^2 . MO \times Om :: \overline{Ss}^2 . \overline{Mm}^2$.

Ayant mené par l'une des extremités M, du premier diametre Mm, une parallele Dd au second diametre Ss, terminée par les asymptotes; elle sera tangente en M, selon la définition 13ᵉ. Et par conséquent * elle sera coupée en deux également par ce point : c'est pourquoi, si l'on prolonge l'ordonnée ON (qui selon la définition 14ᵉ est parallele au diametre Ss) de part & d'autre du diametre Mm, elle rencontrera les asymptotes en deux points L, l, qui seront également éloignés de part & d'autre du point O. Cela posé, soient nommées les données CM, ou Cm, t; CS, ou * MD, ou Md, c; & les indéterminées CO, x; ON, y; on aura à cause des triangles semblables CMD, COL; cette proportion: $CM\ (t) . MD\ (c) :: CO\ (x) . OL$ ou $Ol = \frac{cx}{t}$. Donc LN ou $LO + ON = \frac{cx}{t} + y$, & Nl ou $Ol - NO = \frac{cx}{t} - y$; Et partant $LN \times Nl = \frac{ccxx}{tt} - yy = {}$ * $DM \times Md = cc$. D'où il suit que $\overline{ON}^2\ (yy) . MO \times Om\ (xx - tt) :: \overline{Ss}^2\ (4cc) . \overline{Mm}^2\ (4tt)$. Puisqu'en multipliant les Extrêmes & les Moyens, on trouve $4ttyy = 4ccxx - 4cctt$, c'est à dire (en divisant par $4tt$, & transposant à l'ordinaire) l'équation même précédente $\frac{ccxx}{tt} - yy = cc$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* *Art.* 109.
* *Art.* 113.
* *Art.* 90.

COROLLAIRE GENERAL.

118. Il est visible que ce qu'on a démontré dans la Proposition seconde *, par rapport aux deux axes *Aa*, *Bb*, s'etend par le moyen de cette Proposition à deux diametres conjugués quelconques, *Mm*, *Ss*. Or comme les articles 80, 81, 82, 83, 84 & 85, se tirent de la seconde Proposition, & subsistent également, soit que l'angle *ACB*, soit droit ou qu'il ne le soit pas; il s'ensuit que si l'on suppose dans ces articles que les lignes *Aa*, *Ab*, au lieu d'être les deux axes, soient deux diametres conjugués quelconques, ces articles seront encore vrais dans cette supposition: car leur démonstration demeure toujours la même; & il ne faut pour s'en convaincre entierement, que les relire en mettant par tout où se trouve le mot d'*Axe*, celui de *Diametre*.

* Art. 79.

PROPOSITION VIII.

Theorême.

119. *Soient deux tangentes quelconques* DE, FG, *d'une Hyperbole* MA, *terminées par les asymptotes, & qui s'entrecoupent en un point* O; *je dis que les côtés des triangles* CDE, CFG, *autour de l'angle commun* C, *sont réciproquement proportionnels.*

Fig. XLV.

Il faut prouver que CD. CF :: CG. CE.

Ayant mené par les points touchans *M, A*, les paralleles *MH*, *AL*, à l'asymptote *CG*; il est clair à cause des triangles semblables *CDE*, *HDM*, que *CD* est double de *CH*, & *CE* double de *HM*; puisque *DE* est * double de *DM*. Et à cause des triangles semblables *CFG*, *LFA*, que *CF* est double de *CL*, & *CG* double de *LA*; puisque *FG*, est double de *FA*. Or * *CH*. *CL* :: *LA*. *HM*. Et partant si l'on prend le double de chaque terme, on aura 2*CH* ou *CD*. 2*CL* ou *CF* :: 2*LA* ou *CG*. 2*HM* ou *CE*. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* Art. 109.
* Art. 100.

COROLLAIRE.

120. Il suit de cette Proposition que les droites *DG*, *FE*, sont paralleles entr'elles. D'où il est evident:

1°. Que les triangles *CDE*, *CFG*, sont égaux, car les triangles

triangles *FDE*, *EGE*, qui ont la même base *FE*, & qui sont entre les mêmes paralleles *DG*, *FE*, sont égaux; Et partant, si l'on ajoûte de part & d'autre le même triangle *CEF*, on formera les triangles *CDE*, *CFG*, qui seront egaux entr'eux.

2°. Que la ligne *DE*, est couppée en même raison aux points *M*, *O*, que la ligne *FG* l'est aux points *A*, *O*. Car menant par les points touchans la droite *MA*, il est clair qu'elle sera parallele aux deux droites *DG*; *FE*; puisqu'elle couppe par le milieu les droites *DE*, *FG*, renfermées entre ces paralleles.

PROPOSITION IX.

Problême.

121. *SI par un point quelconque* M, *d'une Hyperbole, l'on mene une ordonnée* MP *à tel de ses diametres* Aa *que l'on voudra, & une tangente* MT *qui le rencontre en* T; *je dis que* CP. CA :: CA. CT. *en observant que les points* P, T, *tombent du même côté du centre* C, *lorsque la ligne* Aa *est un premier diametre; & au contraire qu'ils tombent de part & d'autre du centre, lorsque c'est un second diametre.* Fig. XLVI. & XLVII.

Premier cas. Lorsque la ligne *Aa* est un premier diametre. On prolongera la tangente *MT* jusqu'à ce qu'elle rencontre les asymptotes *CD*, *CG*, aux points *D*, *E*; & l'ordonnée *PM*, jusqu'à ce qu'elle rencontre l'asymptote *CD* au point *N*; on menera ensuite par le point *A* la ligne *AK*, parallele à *DE*, qui rencontre l'asymptote *CG* au point *K*, & la tangente *FG* terminée par les asymptotes, qui sera parallele * à *PM*, & qui rencontre au point *O* l'autre tangente *DE*. Fig. XLVI. * Def. 14.

Cela posé, *AP* est à *AC*, ou *FN* à *FC*, en raison composée de *FN* à *FD*, ou de *OM* à *OD*, ou * de *OA* à *OG*, ou de *EK* à *EG*, & de *FD* à *FC*, ou * de *EG* à *EC*. Or *AT* est à *TC*, ou *KE* à *EC*, en raison composée de *EK* à *EG*, & de *EG* à *EC*. Donc *AP*. *AC*. :: *AT*. *TC*. puisque les raisons composantes de ces deux raisons sont les mêmes; & par consequent *AP* + *AC* ou *CP*. *CA* :: *AT* + *TC* ou *CA*. *CT*. *Ce qui étoit proposé en premier lieu.* * Art. 120. * Art. 120.

Second cas; Lorſque la ligne Aa eſt un ſecond diametre. Ayant mené par le centre C la ligne CK parallele à l'ordonnée PM, qui rencontre l'Hyperbole au point B, & la tangente MT au point R, & par le point touchant M la ligne MK parallele à Aa; il eſt clair que CB ſera le premier demi diametre conjugué au ſecond Aa, & qu'ainſi MK ſera ordonnée à ce diametre.

Cela poſé, ſi l'on nomme les données CA ou Ca, t; CB, c; & les indéterminées CP ou MK, x; PM ou CK, y; on aura ſelon ce qu'on vient de démontrer dans le premier cas, $CR = \frac{cc}{y}$; & partant RK ou $CK - CR = \frac{yy-cc}{y}$. Or les triangles ſemblables KRM, CRT, donnent $KR\ (\frac{yy-cc}{y}).\ RC$
* *Art.* 80. & 118. $(\frac{cc}{y}) :: MK\ (x).\ CT = \frac{ccx}{yy-cc} = \frac{tt}{x}$, en mettant pour $yy - cc$ ſa valeur $\frac{ccxx}{tt}$ tirée de ce que $yy = * \frac{ccxx}{tt} + cc$. C'eſt à dire que $CP.\ CA :: CA.\ CT$. *Ce qui reſtoit à démontrer.*

PROPOSITION X.

Theorême.

122. *Si par un point quelconque* M *d'une Hyperbole qui a pour centre le point* C, *on mene une ordonnée* MP *à l'un ou à l'autre axe* Aa, *& une perpendiculaire* MG *à la tangente* MT, *laquelle paſſe par* M: *Je dis que* CP *ſera toujours à* PG *en la raiſon donnée de l'axe* Aa *à ſon Parametre.*
Fig. XLVIII. & XLIX.

Car nommant le demi axe CA ou Ca, t; & les indéter-
* *Art.* 121. minées CP, x; PM, y; on aura $* CT = \frac{tt}{x}$; Et partant $PT = \frac{xx \mp tt}{x}$, ſelon que Aa eſt le premier ou le ſecond axe. Or les triangles rectangles ſemblables TPM, MPG, donnent $TP\ (\frac{xx \mp tt}{x}).\ PM\ (y) :: PM\ (y).\ PG = \frac{xyy}{xx \mp tt}$. D'où l'on tire cette proportion $CP\ (x).\ PG\ (\frac{xyy}{xx \mp tt} :: \overline{CP}^2 \mp \overline{CA}^2\ (xx \mp tt).\ \overline{PM}^2\ (yy)$. Puiſqu'en multipliant les moyens & les extrêmes, on trouve le même produit xyy. Mais $\overline{CP}^2 \mp$
* *Art.* 81. $\overline{CA}^2$ eſt à $\overline{PM}^2$, comme $*$ l'axe Aa eſt à ſon parametre. Donc CP eſt auſſi à PG en cette même raiſon. *Ce qu'il falloit démontrer.*

PROPOSITION XI.

Theorême.

123. *SI d'un point quelconque* M *d'une Hyperbole, l'on tire à ses deux foyers* F, f, *les droites* MF, Mf; *je dis que la tangente* MT; *qui passe par ce point* M, *divise en deux également l'angle* FMf. FIG. L.

Car ayant mené les perpendiculaires FD, fd, sur la tangente MT; le premier axe Aa, qui passe par les foyers F, f, & qui rencontre la tangente en T; & l'ordonnée MP, à cet axe: on nommera les données CA ou Ca, t; CF ou Cf, m; & l'indéterminée CP, x. L'on aura MF * $(\frac{mx}{t} - t)$. * Art. 78.
Mf $(\frac{mx}{t} + t)$ :: TF ou CF (m) — CT * $(\frac{tt}{x})$. Tf ou Cf * Art. 121.
$(m) + CT$ $(\frac{tt}{x})$. puisqu'en multipliant les extrêmes & les moyens, on forme le même produit. Or les triangles rectangles semblables TFD, Tfd, donnent $TF . Tf :: FD . fd$. L'hypothenuse MF du triangle rectangle MDF, sera donc à l'hypothenuse Mf du triangle rectangle Mdf, comme le côté DF est au côté df; & par consequent ces deux triangles seront semblables. Donc les angles FMD, fMd, qui sont opposés aux côtés homologues DF, df, seront égaux entr'eux. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

124. DE-LA il est évident, que la tangente MT, étant prolongée indéfiniment de part & d'autre du point touchant M, laisse l'Hyperbole AM, toute entiere du côté de son foyer interieur F. Et comme cela arrive toujours en quelque endroit de cette Hyperbole qu'on prenne le point M, il est visible qu'elle sera concave dans toute son étendue autour de son foyer interieur F..

PROPOSITION XII.

Theorême.

125. *LA difference des quarrés de deux diametres conjugués quelconques* Ms, Ss, *est égale à la difference des quarrés des deux axes* Aa, Bb. FIG. LI.

Il faut prouver que $\overline{CS}^2 - \overline{CM}^2 = \overline{CB}^2 - \overline{CA}^2$, *ou que* $\overline{CM}^2 - \overline{CS}^2 = \overline{CA}^2 - \overline{CB}^2$.

* Def. 11. & 13. Si l'on mene les droites *MS*, *AB*, elles seront paralleles à l'asymptote *Cg*, & de plus couppées en deux également par
* Def. 11. & 13. l'autre asymptote *CG*, aux points *H*, *G*; puisque * les lignes *Ms*, *Ab*, sont paralleles à cette asymptote, & que les seconds
* Art. 113. diametres *Ss*, *Bb*, sont couppés * en deux également au centre *C*: C'est pourquoi si l'on mene sur l'asymptote *CG*, les perpendiculaires *AF*, *BE*, *ML*, *SK*, on formera les triangles *GAF*, *GBE*, & *HML*, *HSK*, qui seront semblables &
* Art. 88. égaux. Cela posé, soient nommées les données *CG* ou * *GA*, m; *GE* ou *GF*, a; *AF* ou *BE*, b; & les indéterminées *CH*, x; *HM*, y: ce qui donne $CE = m + a$, $CF = m - a$; $\overline{CE}^2 + \overline{EB}^2$ ou $\overline{CB}^2 = mm + 2am + aa + bb$, $\overline{CF}^2 + \overline{FA}^2$ ou $\overline{CA}^2 = mm - 2am + aa + bb$. Et partant $\overline{CB}^2 - \overline{CA}^2 = 4am$. Or les triangles semblables *GAF*, *HML*, fournissent $GA\,(m) . AF\,(b) :: HM\,(y) . ML$ ou $KS = \frac{by}{m}$. Et $GA\,(m) . GF\,(a) :: HM\,(y) . HL$ ou $HK = \frac{ay}{m}$. Donc $CK = x + \frac{ay}{m}$, $CL = x - \frac{ay}{m}$; $\overline{CK}^2 + \overline{KS}^2$ ou $\overline{CS}^2 = xx + \frac{2axy}{m} + \frac{aayy}{mm} + \frac{bbyy}{mm}$, $\overline{CL}^2 + \overline{LM}^2$ ou $\overline{CM}^2 = xx - \frac{2axy}{m} + \frac{aayy}{mm} + \frac{bbyy}{mm}$. Et partant $\overline{CS}^2 - \overline{CM}^2 = \frac{4axy}{m} = 4am$,
* Art. 101. en mettant pour xy sa valeur * mm. Donc $\overline{CS}^2 - \overline{CM}^2 = \overline{CB}^2 - \overline{CA}^2$; *Ce qu'il falloit démontrer.*

Si l'angle *GCg*, fait par les asymptotes, étoit aigu, au lieu que dans cette figure & le raisonnement qui lui est approprié, il est obtus; *CF* seroit alors plus grande que *CE*, & on prouveroit de la même maniere que $\overline{CM}^2 - \overline{CS}^2 = \overline{CA}^2 - \overline{CB}^2$. Mais si l'angle *GCg* fait par les asymptotes étoit droit, il est visible alors que les lignes *AB*, *MS*, seroient perpendiculaires sur l'asymptote *CG*; & qu'ainsi les deux demi-diametres conjugués *CM*, *CS*, seroient égaux entr'eux, de même que les deux demi-axes *CA*, *CB*. Or comme alors la difference des deux diametres conjugués *Mm*, *Ss*, est nulle, aussi bien que celle des deux axes *Aa*, *Bb*; il s'ensuit que cette Proposition est vraie dans tous les cas.

COROLLAIRE.

126. DE-LA il est évident qu'un premier diametre quelconque *Mm*, est moindre, plus grand, ou égal au second diametre *Ss*, qui lui est conjugué; selon que l'angle *GCg*, fait par les asymptotes, est obtus, aigu, ou droit.

DE'FINITIONS.

16.

Les deux Hyperboles opposées sont appellées *Equilateres*, lorsque deux de leurs diametres conjugués quelconques sont égaux entr'eux; ou bien lorsque l'angle fait par leurs asymptotes est droit.

COROLLAIRE.

127. SI d'un point quelconque *M* d'une Hyperbole équilatere, l'on mene une ordonnée *MP* à tel de ses diametres *Aa* qu'on voudra, on aura * $\overline{MP}^2 = \overline{CP}^2 \mp \overline{CA}^2$: sçavoir —, lorsque *Aa* est un premier diametre; & +, lorsque c'est un second. Car le diametre conjugué au diametre *Aa* * lui sera toujours égal. FIG. LII. * Art. 81. & 118. * Art. 126.

PROPOSITION XIII.

Problême.

128. *DEUX diametres conjugués quelconques étant donnés, & sçachant lequel des deux est le premier; ou ce qui revient * au même, les asymptotes* CD, CF, *d'une Hyperbole étant données, avec un de ses points quelconques* M : *mener deux diametres conjugués* Aa, Bb, *qui fassent entr'eux un angle égal à un angle donné.* FIG. LIII. LIV. & LV. * Art. 114.

Ayant coupé dans un cercle quelconque qui a pour centre le point *o*, un arc *dcf* capable de l'angle *DCF* fait par les asymptotes; on menera par le point de milieu *e*, de la corde *df*, la ligne *ec* qui fasse avec cette corde de part ou d'autre l'angle *dec* ou *fec* égal à l'angle donné; & par le point *c*, où elle rencontre l'arc *dcf*, les droites *cd*, *cf*. Cela fait, on prendra sur les asymptotes les parties *CD*, *CF*, égales aux cordes

cd, *cf*; & ayant tiré *DF*, l'on menera le second diametre *Bb* parallele à cette ligne, & le premier diametre *Aa* qui passe par son milieu *E*. Je dis que ces deux diametres *Aa*, *Bb*, font entr'eux un angle égal à l'angle donné, & qu'ils sont conjugués l'un à l'autre.

Car par la construction l'angle *dcf* est égal à l'angle *DCF* fait par les asymptotes; & par consequent les triangles *DCF*, *dcf*, & *DCE*, *dce*, sont égaux & semblables. L'angle *BCa*, que font entr'eux les deux diametres *Aa*, *Bb*, sera donc égal à l'angle *DEC* ou *dec* qui a été fait égal à l'angle donné. De plus, si l'on mene par le point *A*, que je suppose être l'une des extremités du premier diametre *Aa*, une parallele *DE*, il est clair qu'elle sera couppée également par ce point, puisque
*Art. 119. *DF* l'est au point *E*; & qu'ainsi * elle sera tangente en *A*;
*Def. 13. d'où il suit * que les diametres *Aa*, *Bb*, sont conjugués.

Maintenant pour déterminer la grandeur de ces deux diametres, on tirera par le point donné *M*, une parallele *MKL* au premier diametre *Aa*, laquelle rencontre l'asymptote *CD* au point *K*, & l'autre asymptote *CF*, prolongé au delà du centre *C*, au point *L*: & ayant pris *CA* moyenne proportion-
*Art. 94. nelle entre *KM*, *ML*; il est clair * que le point *A* sera l'une des extremités du premier diametre *Aa*; & qu'ainsi menant les lignes *AB*, *ab*, paralleles aux asymptotes *CF*, *CD*, elles
*Def. 13. * détermineront par leurs points de rencontre *B*, *b*, la grandeur du second diametre *Bb*.

Comme l'on peut mener deux differentes lignes *ec*, *ec*, qui fassent avec la corde *df*, de part & d'autre des angles *dec*, *fec*, égaux à l'angle donné, lorsque cet angle n'est pas droit; il s'ensuit qu'on pourra toujours trouver alors deux differens diametres conjugués *Aa*, *Bb*, qui satisferont également, comme l'on voit dans les figures 54. & 55. Mais il est à remarquer que les diametres conjugués *Aa*, *Bb*, de la la fig. 55. ont une position semblable par rapport à l'asymptote *CF*, à ceux de la figure 54. par rapport à l'autre asymptote *CD*; & que leur grandeur demeure la même dans ces deux differentes positions. Car,

1°. Menant du centre *o* au point *e*, milieu de la corde *df*, la ligne *oe*, elle sera perpendiculaire à cette corde, & par consequent les angles *oec*, *oec*, seront égaux; c'est pourquoi tirant les rayons *oc*, *oc*, les triangles *oec*, *oec*, qui ont le côté

oe commun, les angles *oec*, *oec*, & les côtés *oc*, *oc*, égaux entr'eux, auront auſſi leurs troiſiémes côtés *ec*, *ec*, égaux. Les triangles *fec*, *dec*, qui ont les côtés *ef*, *ed*, & *ec*, *ec*, & les angles *fec*, *dec*, égaux, feront donc égaux & ſemblables; d'où l'on voit que l'angle *ecf*, ou *ECF*, de la figure 55. eſt égal à l'angle *ecd*, ou *ECD*, de la fig. 54. & qu'ainſi la poſition du diametre *Aa*, de la fig. 55. par rapport à l'aſymptote *CF*, eſt ſemblable à celle du diametre *Aa*, de la figure 54. par rapport à l'autre aſymptote *CD*.

2°. Si l'on mene dans la figure 55. la ligne *Ml*, qui faſſe avec l'aſymptote *CF*, prolongée du côté du centre *C*, l'angle *MlC* égal à l'angle *MLC* ou *ECF*, de la figure 54: il eſt clair que les lignes *Ml*, *Mk*, de la figure 55. feront égales aux lignes *ML*, *MK*, de la figure 54; puiſqu'on ſuppoſe que la poſition du point *M* par rapport aux aſymptotes, eſt la même dans ces deux figures. Or l'angle *MlL*, complement à deux droits de l'angle *MlC*, de la figure 55. ou de *ECF* de la figure 54, eſt égal à l'angle *MKk*, complement à deux droits de l'angle *ECD* de la fig. 55. ou de *ECF* de la fig. 54; Et par conſequent dans la fig. 55. les deux triangles *LMl*, *kMK*, qui ont l'angle en *M* commun, & les angles aux points *l*, *K*, égaux, font ſemblables: ce qui donne $LM . Ml :: kM . MK$. Et partant $LM \times MK = lM \times Mk$ ou $LM \times MK$ de la figure 54. D'où l'on voit * que les premiers demi-diametres *CA*, *CA*, des figures 54 & 55, font égaux. Il en eſt de même du diametre *Bb*; puiſque ſa poſition & ſa grandeur dépendent de celles du premier diametre *Aa*, auquel il eſt conjugué. *Art. 94.

Comme l'on ne peut mener qu'une ſeule ligne *ec*, qui faſſe avec la corde *df* de part ou d'autre, un angle égal à l'angle donné, lorſque cet angle eſt droit; il s'enſuit qu'il n'y a que deux diametres conjugués *Aa*, *Bb*, qui faſſent entr'eux un angle droit; & qu'ainſi * ils feront les deux axes. Mais le triangle *dcf* ou *DCF*, étant alors iſoſcelle, le premier axe *Aa* diviſera par le milieu l'angle *DCF* fait par les aſymptotes; d'où l'on voit que pour trouver de poſition les deux axes, il n'y a qu'à tirer deux lignes droites *Aa*, *Bb*, perpendiculaires entr'elles, dont l'une d'elles *Aa*, diviſe par le milieu l'angle *DCF*, fait par les aſymptotes: aprés quoi l'on en déterminera la grandeur, comme on vient de l'enſeigner pour les diametres conjugués. FIG. LVI. & LVII. *Art. 111.

On peut encore trouver les deux axes de cette autre maniere. Soit menée par le point donné *M* une parallele *MH* à l'une des asymptotes *CF*, & terminée par l'autre *CD* au point *H*. Soit prise sur l'asymptote *CD*, la partie *CG* égale à moyenne proportionnelle entre *CH*, *HM*: & soit tirée par le point *G* une parallele *AB* à *CF*, telle que chacune de ses parties *GA*, *GB*, soit égale à *CG*. Il est évident que les lignes *CA*, *CB*, * seront les deux demi-axes de position & de grandeur.

*Art. 101. & 88.

COROLLAIRE.

IL est donc évident, 1°. Qu'il n'y a que deux diametres conjugués qui fassent entr'eux un angle droit; & qu'ainsi il ne peut y avoir que deux axes. 2°. Qu'on peut toujours trouver deux differens diametres conjugués qui fassent entr'eux un angle égal à un angle donné, lorsque cet angle n'est pas droit; que les deux premiers ont une position semblable par rapport à l'autre asymptote, à celle des deux autres par rapport à l'autre asymptote; d'où il suit qu'ils sont semblablement posés de part & d'autre des deux axes, puisque les deux axes divisent par le milieu les angles faits par les asymptotes; & qu'enfin leur grandeur demeure la même dans ces deux differentes positions.

PROPOSITION XIV.

Problême.

130. *DEUX diametres conjugués quelconques étant donnés, & sçachant lequel des deux est le premier; ou ce qui est la même chose * les asymptotes de deux Hyperboles opposées étant données avec un de leurs points quelconque: décrire ces Hyperboles par un mouvement continu.*

*Art. 114.

PREMIERE MANIE'RE.

On cherchera les deux axes, comme l'on vient d'enseigner dans la proposition précedente, & l'on décrira ensuite les Hyperboles opposées selon l'article 76.

SECONDE MANIE'RE.

FIG. LXVIII. Soient *Aa*, *Bb*, les diametres conjugués donnés, entre les-

quels le diametre Aa est le premier, ou bien CG, Cg, les asymptotes données, avec le point A, un de ceux des Hyperboles opposées. Ayant mené par le point donné A une parallele AG, à l'une des asymptotes Cg, & terminée par l'autre en G, on fera glisser le long de l'asymptote CG, indéfiniment prolongée de part & d'autre du centre C, une droite HK égale à CG, qui entraînera par son extremité H une parallele HM à l'asymptote Cg, & par son autre extremité K, une droite KA mobile autour du point fixe A. Je dis que l'interſection continuelle M des droites AK, HM, décrira dans ce mouvement les deux Hyperboles opposées qu'on demande.

Car à cause des triangles semblables KHM, KGA, on aura toujours KH ou $CG . HM :: KG$ ou $CH . GA$. Et partant $CH \times HM = CG \times GA$. Le point M sera donc * un des points de l'Hyperbole qui passe par le point donné A, & qui a pour asymptotes les droites données CG, Cg; ou de l'Hyperbole opposée. *Art. 101.

PROPOSITION XV.

Ploblême.

131. *LES mêmes choses étant données que dans la Proposition précedente; décrire les Hyperboles opposées par plusieurs points.*

PREMIERE MANIERE.

Soient CD, CE, les asymptotes données, & A le point donné. Ayant mené par ce point A autant de lignes DE, DE, DE, &c. qu'on voudra, terminées par les asymptotes; & ayant pris sur ces lignes droites les parties EM, EM, EM, &c. égales AD, AD, AD, &c; sçavoir chacune à sa correspondante : il est clair * 1°. Que les points M, M, M, &c, seront à l'Hyperbole qui passe par le point A, lorsque les points E, E, E, &c. tombent au dessous du centre. 2°. Que ces Hyperboles ont pour asymptotes les droites CD, CE. Faisant donc passer par tous les points M, M, M, &c. qui tombent dans l'angle fait par les asymptotes, une ligne courbe, & par les autres points M, M, M, &c. qui tombent dans l'angle opposé au sommet à celui ci, une autre ligne courbe; ces deux lignes seront les deux Hyperboles opposées qu'on demande. FIG. LIX. *Art. 106.

SECONDE MANIE'RE.

FIG. LX. Soient les lignes Aa, Ab, les deux diametres conjugués donnés, entre lesquels Aa est le second. Ayant pris sur le premier demi-diametre CB prolongé indéfiniment du côté de B, de petites parties CE, EE, EE, &c. égales entr'elles, autant & de telle grandeur qu'on voudra, on menera par celui des points E, qui est le plus proche du centre C, la ligne EP parallele à BA; & on prendra sur le second diametre Aa de part & d'autre du centre C, autant de petites parties CP, PP, PP, &c. toutes égales à CP, qu'il y a de petites parties CE, EE, EE, &c. Ayant tiré CD perpendiculaire & égale à CB, on menera par tous les points P, P, P, &c, des paralleles MPM, MPM, MPM, &c. au premier diametre Bb, sur chacune desquelles on prendra de part & d'autre du point P, des parties PM, PM, égales chacune à sa correspondante ED. Je dis que les deux lignes courbes qui passent par tous les point M ainsi trouvés, seront les deux Hyperboles opposées qu'on demande.

Car nommant les données CA, t; CB ou CD, c; & les indéterminées CP, x; PM, y; les triangles semblables CAB, CPE, donneront cette proportion $CA\ (t) . CB\ (c) :: CP\ (x) . CE = \frac{cx}{t}$. Et à cause du triangle ECD rectangle en C, (en imaginant chaque hypothenuse ED qu'on a omise de peur de confusion dans la figure) le quarré $\overline{ED}^2$ ou $\overline{PM}^2\ (yy) = \overline{CE}^2$
* Art. 81. & 118. $\left(\frac{ccxx}{tt}\right) + \overline{CD}^2\ (cc)$. La ligne PM sera donc * une ordonnée au second diametre Aa, qui a pour conjugué le premier Bb; & comme cette demonstration convient à toutes les lignes PM, puisque chaque CP est toujours à la correspondante CE, en la raison de CA à CB: il s'ensuit &c.

FIG. LXI. Lorsque les diametres conjugués Aa, Bb, sont égaux en-
* Def. 16. tr'eux, c'est à dire *, lorsque les Hyperboles qu'on demande sont équilateres; la construction devient beaucoup plus aisée. Car ayant mené CD perpendiculaire & égale à CA, & tiré par un point quelconque P du diametre Aa, une parallele MPM au premier diametre Bb; il n'y aura qu'à prendre sur cette ligne de part & d'autre du point P, les parties PM, PM, égales chacune à PD, pour avoir deux points des Hyperboles opposées. Car à cause du triangle PCD rectangle en C (en

imaginant chaque hypothenuse *PD*) on aura toujours $\overline{PD}^2$ ou $\overline{PM}^2 = \overline{CP}^2 + \overline{CD}^2$ ou $\overline{CA}^2$; Et partant la ligne *PM* sera * une ordonnée au second diametre *Aa*, qui a pour con- *Art. 117.
jugué le premier *Bb* qui lui est égal.

DÉFINITION.

17.

Soient deux Hyperboles opposées *AM*, *am*, qui ayent pour Fig. LXII.
premier axe la ligne *Aa*, & pour second axe la ligne *Bb*; & soient deux autres Hyperboles opposées *BS*, *bs*, qui ayent au contraire pour premier axe la ligne *Bb*, & pour second axe la ligne *Aa*: ces deux nouvelles Hyperboles *BS*, *bs*, sont appellées *Conjuguées* aux deux premieres *AM*, *am*; & les quatre ensemble sont appellées Hyperboles *Conjuguées*.

COROLLAIRE.

132. Il est clair que les lignes *Ba*, *Ab*, sont paralleles; puisque les droites *Aa*, *Bb*, terminées par ces lignes, s'entrecoupent * en deux également au point *C*. D'où il suit, selon la défi- *Def. 4. & 5.
nition 11e. que l'Hyperbole *BS* conjuguée à *AM*, a pour l'une de ses asymptotes la ligne *CG* asymptote de l'Hyperbole *AM*; & pour l'autre, la ligne *Cg* autre asymptote de l'Hyperbole *AM* indéfiniment prolongée du côté *C*: puisque ces deux lignes passent par le centre *C*; & sont les paralleles aux deux droites *Ba*, *BA*, menées de l'extremité *B* du premier axe *Bb* de l'Hyperbole *BS* aux deux extremités *A*, *a*, du second. Il est donc évident que les deux droites *CG*, *Cg*, paralleles à *Ab*, *AB*, indéfiniment prolongées de part & d'autre du centre *C*, sont non seulement les asymptotes des Hyperboles opposées *AM*, *am*; mais aussi des deux autres *BS*, *bs*, qui leur sont conjuguées.

PROPOSITION XVI.

Theorême.

133. *Si l'on mene par un point quelconque* H *d'une asymptote* CG *commune aux deux Hyperboles* AM, BS, *une parallele* MS *à l'autre asymptote* Cg; *je dis qu'elle rencontrera*

ces deux Hyperboles en des points M, S, *qui sont également éloignés de part & d'autre du point* H.

* *Art.* 104. Car, 1°. La ligne *MS* rencontrera * chacune des Hyperboles *AM*, *BS*, en un point. 2°. A cause de l'Hyperbole

* *Art.* 101. le *AM*, le rectangle * $CH \times HM = CG \times GA$; & à cause de l'Hyperbole *BS*, le rectangle $CH \times HS = CG \times$

* *Art.* 88. GB. Donc, puisque * $GB = GA$, il s'ensuit que $CH \times HS = CH \times HM$; Et qu'ainsi $HS = HM$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

134. Si l'on mene des points *M*, *S*, des deux Hyperboles *AM*, *BS*, les diametres *MCm*, *SCs*, terminés par les deux au-

* *Art.* 114. tres Hyperboles *am*, *bs*; il est clair * que le diametre *Ss* sera le second diametre conjugué au premier *Mm* des deux Hyperboles opposées *AM*, *am*; & réciproquement que le diametre *Mm* sera le second diametre conjugué au premier *Ss* des deux Hyperboles opposées *BS*, *bs*. D'où l'on voit que deux diametres conjugués quelconques *Mm*, *Ss*, de deux Hyperboles opposées *AM*, *am*, sont aussi deux diametres conjugués des deux autres Hyperboles *BS*, *bs*, qui leur sont conjuguées; avec cette difference que le premier diametre *Mm* devient le second, & qu'au contraire le second *Ss* devient le premier.

COROLLAIRE II.

135. DE-LA il est manifeste que les Hyperboles conjuguées *BS*, *bs*, aux deux *AM*, *am*, passent par les extremités *S*, *s*, de tous les seconds diametres *SCs* de ces Hyperboles: & réciproquement que les Hyperboles *AM*, *am*, passent par les extremités *M*, *m*, de tous les seconds diametres *MCm* des deux Hyperboles *BS*, *bs*, qui leur sont conjuguées.



LIVRE QUATRIEME.

Des trois Sections Coniques.

DÉFINITION.



ON entend par le terme general de *Section Conique*, chacune des trois lignes Courbes dont l'on vient de parler dans les Livres précedens; ſçavoir, la *Parabole*, l'*Ellipſe*, l'*Hyperbole* ou les *Hyperboles oppoſées*.

PROPOSITION I.

Theorême.

136. *SI par l'extremité* A *d'un diametre quelconque* Aa *d'une Ellipſe, ou d'un premier diametre* Aa *d'une Hyperbole, l'on mene une parallele* AG *à ſes ordonnées* PM, *qui ſoit égale à ſon parametre ; & qu'on tire de l'autre extremité* a, *la droite* aG, *qui coupe en* O *une ordonnée quelconque* PM *prolongée s'il eſt neceſſaire : je dis que le quarré de l'ordonnée* PM *eſt égal au rectangle de* AP *par* PO. Fig. LXIII. & LXIV.

Il faut prouver que $\overline{PM}^2 = AP \times PO$.

Selon les articles 41 & 55. du ſecond Livre, 81. & 118. du troiſiéme, on aura $Aa . AG :: AP \times Pa . \overline{PM}^2$. Or à cauſe des triangles ſemblables aAG, aPO, il vient $Aa . AG :: Pa . PO :: AP \times Pa . AP \times PO$. Donc $\overline{PM}^2 = AP \times PO$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

137. DE-LA il eſt évident que le quarré d'une ordonnée quelconque *PM* à un diametre *Aa*, eſt toujours moindre dans l'Ellipſe, & toujours plus grand dans l'Hyperbole, que le rectangle fait du parametre *AG* par la partie *AP* de ce diametre, priſe entre ſon origine ou extremité *A*, & la rencontre *P* de l'ordonnée; au lieu que dans la Parabole * ils ſont égaux. Or c'eſt à cauſe de cette proprieté, que Apollonius, ſurnommé le *Grand Geometre*, a impoſé aux Sections Coniques les noms que nous avons marqués: car il a voulu donner à entendre par celui de *Parabole*, la juſteſſe ou exactitude; par celui d'*Ellipſe*, le défaut ou manquement; & par celui d'*Hyperbole*, l'excès qui ſe trouve dans la comparaiſon des quarrés des ordonnées *PM* avec les rectangles correſpondans *AP* x *AG*.

* *Art.* 7. & 10.

FIG. LXV.

PROPOSITION II.

Theorême.

138. *DANS une Ellipſe tout diametre* Aa, *& dans les Hyperboles oppoſées tout premier diametre* Aa *eſt diviſé en deux également par le centre* C, *& ne rencontre la Section qu'en deux points.*

FIG. LXVI. & LXVII.

On a démontré cette Propoſition dans les articles 50 du ſecond Livre; 96 & 103 du troiſiéme.

PROPOSITION III.

Theorême.

139. *IL ne peut y avoir qu'une ſeule tangente* LAL *qui paſſe par un point donné* A *ſur une Section Conique.*

Cette Propoſition ſe trouve démontrée dans les articles 21 du Livre premier; 56 du Livre ſecond; & 107 du troiſiéme.

PROPOSITION IV.

Theorême.

140. *LES tangentes* LAL, lal, *qui passent par les extremités* A, a, *d'un diametre quelconque d'une Ellipse, ou de deux Hyperboles opposées; sont paralleles entr'elles.*

Ceci a été démontré dans les articles 44 & 55 du Livre second; & 110 du Livre troisiéme.

PROPOSITION V.

Theorême.

141. *UN diametre quelconque étant donné dans l'Ellipse ou dans les Hyperboles opposées; je dis que la position du diametre qui lui est conjugué, est déterminée de maniere qu'il ne peut y en avoir qu'une seule.*

Car 1°. Si la Section est une Ellipse, ou qu'étant les Hyperboles opposées le diametre donné *Aa* soit un premier diametre; il est clair selon l'article 56 du Livre second, & la définition 13e du troisiéme Livre, que son conjugué *Bb* sera parallele à la tangente *LAL*, qui passe par l'une de ses extremités *A*. Donc * &c. * *Art.* 139.

2°. Si la Section étant les deux Hyperboles opposées, le diametre donné *Bb* est un second diametre; la chose a été démontrée dans l'article 115 du troisiéme Livre.

COROLLAIRE.

142. IL est donc évident qu'une Section Conique étant donnée avec un de ses diametres, la position des ordonnées à ce diametre, sera déterminée de maniere que chacune n'en peut avoir qu'une seule, & qu'elles sont toutes paralleles entr'elles. Car elles doivent être paralleles dans la Parabole * à la tangente qui passe par l'origine du diametre donné, & dans les autres * Sections au diametre conjugué au diametre donné. * *Art.* 21. * *Def.* 12, II. & 14. III.

PROPOSITION VI.

Theorême.

143. *DANS une Ellipse tout diametre* Aa, *& dans les Hyperboles opposées tout premier diametre* Aa, *divise la Section en des por-*

tions AM, am, *qui étant prises de part & d'autre de ce diametre dans des positions contraires; sont parfaitement semblables & égales entr'elles.*

Car ayant pris sur le diametre *Aa* (prolongé lorsqu'il s'agit des Hyperboles opposées,) de part & d'autre du centre *C* deux parties quelconques *CP*, *Cp*, égales entr'elles; & mené de part & d'autre les ordonnées *PM*, *pm*, il est clair que ces ordonnées sont * égales entr'elles, & que les angles *CPM*, *Cpm*, sont * égaux. Si donc l'on conçoit que le plan *Cpm* separé de celui qu'on voit ici, soit placé de l'autre côté du diametre *Aa* dans une position contraire, en sorte que la droite *Cp* tombe sur *CP*, & *pm*, sur *PM*; il est visible que le point *a* tombera * sur le point *A*, & le point *m* sur le point *M*. Et comme cela arrivera toujours de quelque grandeur qu'on puisse prendre les parties *CP*, *Cp*; il s'ensuit que tous les points *m* de la portion *am*, tomberont exactement sur tous les points *M* de la portion *AM*; & qu'ainsi ces deux portions se confondront l'une avec l'autre. *Ce qu'il falloit démontrer*,

* Art. 45. 55. 85. & 118.
* Art. 142.
* Art. 138.

PROPOSITION VII.

Theorême.

144. *S'il l'on mene par un point quelconque* P *d'un diametre* Aa *d'une Section Conique (prolongé lorsque la Section étant une Hyperbole, c'est un premier diametre) une parallele* MPM *aux ordonnées à ce diametre; je dis qu'elle rencontrera la Section en deux points* M, M, *également éloignés de part & d'autre du point* P, *& non en davantage: Et réciproquement que si une ligne* MM *terminée par une Section Conique, est coupée en deux également par un diametre* Aa *en un point* P, *autre que le centre, elle sera parallele aux ordonnées à ce diametre.*

Fig. LXVIII. LXIX. LXX. LXXI.

Ceci a été démontré dans les articles 9, 11 & 20 du Livre premier; 43, 45 & 55 du Livre second; 83, 85 & 118 du Livre troisiéme.

COROLLAIRE I.

145. DE-LA il est manifeste que si une ligne quelconque *MM* terminée par une Section Conique, est coupée en deux également

lement par un diametre *Aa* en un point *P* autre que le centre; toutes les paralleles à cette ligne terminées par la Section, le seront aussi.

PROPOSITION VIII.

Problême.

146. *UNE Section Conique étant donnée, en trouver un diametre.*

Ayant mené deux droites *MM*, *NN*, paralleles entr'elles, & terminées par la Section; on tirera par leurs points de milieu *P*, *Q*, une ligne droite *Aa* qui sera un diametre. * *Art.* 145.

Car * le diametre qui passe par le point *P* milieu de *MM*, doit aussi passer par le point *Q* milieu de *NN*.

COROLLAIRE I.

147. SI l'on mene en même sorte un autre diametre quelconque *Dd*; il est clair que la Section Conique sera une parabole * * *Def.* 7, I.
lorsque *Dd* est parallele à *Aa*; une Ellipse * lorsque *Dd* ren- * *Def.* 9, II.
contre *Aa* au dedans de la Section; & enfin une Hyperbole
* ou les Hyperboles opposées lorsque les diametres *Dd*, *Aa*, * *Def.* 9, III.
se rencontrent en un point *C* hors de la Section; & dans ces deux derniers cas que le point de rencontre *C* est le centre. Cela est une suite des définitions des diametres de ces trois lignes courbes.

Lorsque l'Ellipse est donnée toute entiere, il suffit pour avoir le centre de mener un diametre *Aa*; car sa grandeur étant déterminée par la rencontre de l'Ellipse, il n'y a * qu'à * *Art.* 50.
le diviser par le milieu en *C*. Il en est de même lorsque * * *Art.* 96.
les Hyperboles opposées sont données.

COROLLAIRE II.

148. DE-LA il suit qu'une Section Conique étant donnée, avec un point *O* sur le même plan, on peut toujours mener un diametre *Dd* qui passe par ce point. Car il ne faut dans la Parabole que mener par le point donné, *O* une parallele *Dd* à un diametre quelconque *Aa*; & dans l'Ellipse, ou dans l'Hyperbole, ou dans les Hyperboles opposées, une ligne droite *Dd* qui passe par le point donné *O*, & par le centre *C* que l'on aura trouvé par le Corollaire précedent.

COROLLAIRE III.

149. **D**E-LA il est évident qu'une ligne droite *MM*, ne peut rencontrer une Section Conique qu'en deux points *M*, *M*; & jamais en davantage. Car si l'on mene par le point de milieu *P* de la ligne *MM* un diametre *Aa*, il est clair selon l'article 144, qu'elle sera parallele aux ordonnées à ce diametre; d'où il suit selon le même article qu'elle ne peut rencontrer la Section qu'aux deux points *M*, *M*.

Si la ligne droite passoit par le centre *C*; on auroit recours à l'article 138. où cela a deja été démontré.

COROLLAIRE IV.

150. **U**NE Ellipse ou une Hyperbole (*fig.* 69. 70.) étant donnée; trouver deux de ses diametres conjugués *Aa*, *Bb*; & de plus mener les asymptotes *CG*, *Cg*, lorsque c'est une Hyperbole.

Ayant trouvé un diametre *Aa* par le moyen des deux paralleles *MM*, *NN*, & mené par le centre *C* une parallele

* *Def.* 12, II. & 14, III. *Bb*, à ces deux lignes: il est clair * que les diametres *Aa*, *Bb*, seront conjugués; puisque les lignes *MM*, *NN*, étant coupées en deux également par le diametre *Aa* aux points

* *Art.* 144. *P*, *Q*, seront * ordonnées de part & d'autre à ce diametre.

Maintenant pour mener (*fig.* 70.) les asymptotes *CG*, *Cg*; on fera $AP \times PA . \overline{PM}^2 :: \overline{CA}^2 . \overline{CB}^2$ ou $\overline{Cb}^2$. ou (ce qui est la même chose) comme la moyenne proportionnelle entre *AP*, *PA*, est à *PM*, de même *CA* est à *CB* ou *Cb*. Et ayant tiré les droites *AB*, *Ab*, on leur menera par le centre *C* les paralleles indéfinies *Cg*, *CG*, qui seront les asymptotes

* *Art.* 81. & 118. cherchées. Car il est clair que *Bb* sera * la grandeur du second diametre conjugué au premier *Aa*; & le reste est évident selon les définitions 13 & 14 du troisiéme Livre.

PROPOSITION IX.

Problême.

151. *UNE Section Conique étant donnée, avec un de ses diametres* Aa; *trouver la position des ordonnées* PM *à ce diametre.*

Ayant mené deux paralleles au diametre donné *Aa*, qui en foient également éloignées de part & d'autre, & qui rencontrent la Section en des points *M*, *M*; je dis que la ligne *MM* qui coupe le diametre donné au point *P*, est ordonnée de part & d'autre à ce diametre, pourvû que le point *P* ne tombe point sur le centre. FIG. LXVIII. LXIX. LXX. LXXI.

Car par la construction la ligne *MM* sera coupée en deux également par le diametre *Aa* au point *P*; & par conséquent elle sera * ordonnée de part & d'autre à ce diametre. * *Art.* 144.

On peut toujours par cette maniere trouver la position d'une ordonnée *PM* à un diametre donné *Aa*. Car 1°. Dans la Parabole & l'Hyperbole (*fig.* 68 & 70.) lorsque le diametre donné *Aa* est un premier diametre; il est clair qu'à quelque distance qu'on mene de part & d'autre les deux paralleles au diametre *Aa*, elles rencontreront chacune la Section en un point *M*; puisque * la Section s'éloigne toujours de plus en plus à l'infini du diametre *Aa*. 2°. Dans l'Ellipse (*fig* 69.), & dans les Hyperboles opposées (*fig.* 71) lorsque le diametre donné *Aa* est un second diametre; il est clair qu'on peut toujours mener deux paralleles de part & d'autre du diametre *Aa*, qui coupent la Section chacune en un point *M*, en sorte que la ligne *MM* rencontre le diametre donné *Aa* en un point *P* autre que le centre; puisque dans l'Ellipse * les ordonnées du diametre *Aa* vont toujours en diminuant depuis le centre *C* jusqu'en *A*, & qu'au contraire dans les Hyperboles opposées * elles vont toujours en augmentant à mesure qu'elles s'éloignent du centre *C*. * *Art.* 10. 20. 84. & 118. * *Art.* 44. & 55. * *Art.* 84. & 118.

COROLLAIRE I.

152. DE-LA on tire (*fig.* 68, 69, 70.) une nouvelle maniere de mener une tangente par un point donné *A* sur une Section Conique donnée. Car * ayant mené par ce point un diametre *Aa*, & trouvé une double ordonnée *MPM* à ce diametre; il est clair * que si l'on mene par le point *A* une parallele à *MM*, elle sera tangente en *A*. * *Art.* 148. * *Art.* 10, 20, 44, 55, 84, 118. & *Def.* 9, I. 12, II. 7, III.

COROLLAIRE II.

153. DE-LA on voit encore comment une Ellipse ou les Hyperboles opposées (*fig.* 69, 70, 71.) étant données avec un de

leurs diametres quelconques *Aa*; on peut trouver le diametre *Bb* qui lui est conjugué. Car il n'y a qu'à mener par le centre *C* une parallele *Bb* aux ordonnées à ce diametre.

Ou bien; soit *Bb* le diametre donné, & qu'il faille trouver son conjugué *Aa*. Ayant tiré *MM* parallele à *Bb* & terminée par la Section, on menera par son point de milieu *P*, & le milieu *C* de *Bb*, le diametre cherché *Aa*.

COROLLAIRE III.

154. UNE Hyperbole *MAM* (*fig.* 70.) étant donnée, avec un de ses seconds diametres *Bb* de position; en terminer la grandeur, & trouver en même temps la position de ses ordonnées.

On cherchera le premier diametre *Aa* conjugué au second *Bb*, par le moyen de la seconde maniere du Corollaire précedent; & ayant fait $AP \times Pa$, $\overline{PM}^2 :: \overline{CA}^2 . \overline{CB}^2$ ou $\overline{Cb}^2$. Il

*Art. 81. & 118. est clair * que *Bb* sera la grandeur du second diametre *Bb*, & que ses ordonnées seront paralleles au diametre *Aa*.

PROPOSITION X.

Problême.

155. *D'UN point donné* T *hors une Section Conique donnée, mener deux tangentes* TM, TM, *à cette Section.*

Fig. LXXII. LXXIII. LXXIV.

POUR LA PARABOLE.

*Art. 148. Ayant mené (*fig.* 72.) par le point donné *T* * un diametre qui rencontre la Parabole au point *A*, & pris sa partie *AP*

*Art. 151. égale à *AT*; on tirera par le point *P* * une parallele aux or-

*Art. 144. données qui rencontrera * la Parabole en deux points *M*, *M*; par lesquels & par le point donné *T* on tirera les droites *TM*,

*Art. 22. & 23. *TM*, qui seront * les tangentes cherchées.

POUR L'ELLIPSE.

*Art. 148. Ayant mené (*fig.* 73.) par le point donné *T* * le diametre *Aa*, & pris *CP* troisiéme proportionnelle à *CT*, *CA*; on menera par le point *P*, une parallele aux ordonnées qui rencon-

*Art. 144. trera * l'Ellipse en deux points *M*, *M*; par lesquels & par le

point donné *T* on tirera les droites *TM*, *TM*, qui seront * les tangentes cherchées. *Art. 57. & 58.

POUR L'HYPERBOLE & LES HYPERBOLES OPPOSÉES.

Ayant mené (*fig.* 74.) par le point donné *T*, * le diametre *Aa*, dont on déterminera la grandeur * s'il est un second diametre: on prendra *CP* troisiéme proportionnelle à *CT*, *CA* (du même côté du point donné *T*, par rapport au centre, lorsque ce point tombe dans l'un des angles faits par les asymptotes; & du côté opposé, lorsqu'il tombe dans l'un des angles à côté): & l'on menera par le point *P* une parallele aux ordonnées qui rencontrera * l'Hyperbole ou les Hyperboles opposées en deux points *M*, *M*; par lesquels & par le point donné *T*, on tirera les droites *TM*, *TM*, qui seront * les tangentes cherchées. *Art. 148. *Art. 154. *Art. 144. *Art. 121.

Si le point donné tomboit sur le centre *C*, les deux tangentes seroient alors * les asymptotes *CG*, *Cg*, & on les tireroit comme l'on a enseigné dans l'art. 150. Et enfin si le point donné tomboit sur une asymptote comme en *S*, on tireroit par le point *H* milieu de *CS*, une parallele *HM* à l'autre asymptote *CG*, laquelle rencontreroit * l'Hyperbole en un point *M*, par où & par le point donné *S*, on tireroit une droite *SM* qui seroit * une des tangentes cherchées; & l'autre seroit l'asymptote même *Cg* sur laquelle se trouve le point donné *S*. *Art. 108. *Art. 104. *Art. 107.

COROLLAIRE I.

156. COMME la ligne *MPM* parallele aux ordonnées rencontre toujours * la Section en deux points *M*, *M*, également éloignés de part & d'autre du point *P*, & non en davantage; il s'ensuit qu'on ne peut mener d'un point donné *T* hors une Section Conique que les deux tangentes *TM*, *TM*. D'où il est évident que le diametre qui passe par le point de rencontre *T* de deux tangentes, coupe par le milieu en *P* la ligne *MM* qui joint les points touchans; & réciproquement que le diametre qui coupe par le milieu en *P* une ligne droite *MM* qui joint les points touchans de deux tangentes *MT*, *MT*, passe par leur point de rencontre *T*. *Art. 144.

COROLLAIRE II.

157. TOUTES les tangentes de la Parabole (*fig.* 72.) se rencontrent deux à deux, étant prolongées autant qu'il est necessaire. Car si l'on joint deux points touchans quelconques *M*, *M*, par une ligne droite, & qu'aprés l'avoir coupée par le milieu en *P*, on prenne sur le diametre qui passe par ce point, & qui rencontre la Parabole en *A*, la partie *AT* égale à *AP*; il est clair que les deux tangentes *MT*, *MT*, qui passent par les points *M*, *M*, se rencontreront en ce point *T*.

COROLLAIRE III.

158. IL est encore évident (*fig.* 74.) que toutes les tangentes d'une Hyperbole se rencontrent deux à deux, étant prolongées autant qu'il est necessaire; & toujours au dedans de l'angle fait par les asymptotes. Car si l'on joint deux point touchans quelconques *M*, *M*, par une ligne droite, & qu'aprés l'avoir coupée par le milieu en *P*, on prenne sur le diametre qui passe par ce point & qui rencontre l'Hyperbole en *A*, la partie *CT* troisiéme proportionnelle à *CP*, *CA*; il est clair que les deux tangentes *MT*, *MT*, se rencontreront en ce point *T*,
* *Art.* 103. lequel sera toujours * au dedans de l'angle fait par les asymptotes, puisque le demi-diametre *CA* tombe au dedans de cet angle.

COROLLAIRE IV.

159. TOUTES les tangentes d'une Ellipse ou des Hyperboles opposées (*fig.* 73. 74.) se rencontrent deux à deux, lorsque la ligne qui joint les deux points touchans ne passe point par le centre: sçavoir, celles de l'Ellipse du même côté du centre par rapport à cette ligne, & celles des Hyperboles opposées de l'autre côté. Cela se prouve par le moyen de la Proposition cy-dessus, comme l'on vient de faire voir dans les deux Corollaires précédens.

PROPOSITION XI.

Problême.

160. *UNE Section Conique étant donnée, en trouver un diametre qui fasse de part ou d'autre avec ses ordonnées des angles égaux à un angle donné.*

POUR LA PARABOLE.

Ayant trouvé * un de ses diametres *AP*, on menera par son origine *A*, la ligne *AN*, qui fasse avec *AP* de part ou d'autre l'angle *PAN* égal à l'angle donné, & qui rencontre la Parabole au point *N*. Ayant divisé *AN* par le milieu en *O*, & tiré *OM* parallele à *AP*; je dis que la ligne *MO* est le diametre qu'on cherche. * *Art.* 146. FIG. LXXV. LXXVI.

Car 1°. Tous les diametres d'une Parabole devant être paralleles entr'eux, selon la definition septieme du premier Livre, il s'ensuit que *MO* sera un diametre; puisque *AP* en est un.

2°. La ligne *AN* terminée par la Parabole étant coupée en deux parties égales par le diametre *MO*, elle lui sera * ordonnée de part & d'autre. * *Art.* 144.

3°. A cause des paralleles *MO*, *AP*, l'angle *MOA* que fait le diametre *MO* avec son ordonnée *OA*, sera égal à l'angle *PAN* qui a été fait égal à l'angle donné. Donc &c.

Si l'angle donné est droit, il est manifeste que le diametre *MO* qu'on trouvera par cette methode sera * l'axe de la Parabole. * *Art.* 23.

POUR LES AUTRES SECTIONS.

Ayant trouvé * un de leurs diametres *Aa*, & décrit sur ce diametre de part ou d'autre un arc de cercle *ANa* capable de l'angle donné ou de son complement à deux droits; on menera du point *N* où il rencontre la Section aux deux extremités *A*, *a*, du diametre *Aa*, les lignes *NA*, *Na*; par les milieux desquelles *O*, *Q*, & par le centre *C*, on tirera deux diametres, *Mm*, *Ss*. Je dis que chacun de ces diametres fera de part ou d'autre avec ses ordonnées des angles égaux à l'angle donné. * *Art.* 146. FIG. LXXVII. LXXVIII. LXXIX. LXXX.

Car la ligne *AN* terminée par la Section, étant coupée en deux également au point *O* par le diametre *Mm*, elle sera * ordonnée de part & d'autre à ce diametre. Or le diametre *Mm* est parallele à la ligne *Na*, puisqu'il divise par le milieu aux points *C*, *O*, les lignes *Aa*, *AN*; & partant l'angle *mOA* que fait le diametre *Mm* avec son ordonnée *AO*, sera égal à l'angle *ANa*, qui par la construction est égal à l'angle donné, ou à son complement à deux droits. On prouvera de même * *Art.* 144.

que le diametre Ss fait avec son ordonnée QN un angle égal à l'angle donné, ou à son complement à deux droits. Donc &c.

* Def. 12, II. & 14. III. Il est visible 1°. Que le diametre Ss est * conjugué au diametre Mm; puisqu'il est parallele à son ordonnée ON. 2°. Que * Art. 58. & 128. les diametres conjugués Mm, Ss, deviennent * les deux axes, lorsque l'angle donné est droit.

PROPOSITION XII.

Problême.

161. *UN diametre d'une Section Conique étant donné, avec son parametre, & la position de ses ordonnées, & sçachant de plus si c'est un premier ou second diametre lorsqu'il s'agit de l'Hyperbole; décrire la Section par une methode uniforme pour toutes les trois.*

PREMIERE MANIE'RE.

* Art. 27. Fig. LXXXI. *Pour la Parabole*. Ayant trouvé * l'axe AP, son origine A, & son parametre AG que l'on prendra sur l'axe prolongé du côté de son origine; on menera par le point G une ligne droite indefinie DD perpendiculaire à PG. On fera mouvoir ensuite une ligne droite indéfinie DM le long de GD toujours parallelement à AG, en entraînant par son extremité D le côté DA de l'angle droit DAM, mobile sur son sommet A autour de l'origine A de l'axe AP. Je dis que l'intersection continuelle M de la ligne DM & du côté AM, décrira dans ce mouvement la Parabole qu'on demande.

Car menant MP perpendiculaire à l'axe, les triangles rectangles AGD, MPA, seront semblables; puisque chacun des angles GAD, PMA, étant joint à l'angle PAM, vaut un droit. On aura donc AG. GD ou PM :: PM. AP. D'où * Art. 7. il suit que $\overline{PM}^2 = GA \times AP$; & qu'ainsi PM est une * ordonnée à l'axe AP.

On a déja donné cette construction dans le Livre premier article 29, d'une maniere qui convient à tous les diametres: On ne la repete ici, & on ne la restraint à l'axe, que pour en faire voir la liaison & le rapport qu'elle a avec celle qu'on va donner pour les autres Sections.

Pour

Pour les autres Sections. Ayant trouvé entre le diametre donné & son parametre une moyenne proportionnelle, & l'ayant placée en sorte qu'elle soit parallele aux ordonnées, & coupée en deux également par le centre; il est clair * qu'on aura deux diametres conjugués; par le moyen desquels on cherchera * les deux axes, & ensuite le parametre de celui des deux qu'on voudra dans l'Ellipse, & du premier dans l'Hyperbole. Cela fait. *Def.13. II. & 15. III. *Art.64. & 128.

On prolongera dans l'Ellipse, & on coupera dans l'Hyperbole l'axe *Aa* en *G*; en sorte que *aG* soit à *GA*, comme l'axe *Aa* est à son parametre. Ayant tiré par le point *G* une perpendiculaire indéfinie *DD* à l'axe *Aa*, on fera mouvoir le point *D* le long de cette ligne, en entraînant avec lui la ligne droite *Da* mobile autour de l'extremité *a* de l'axe *Aa*, & le côté *DA* de l'angle droit *DAM* mobile sur son sommet *A* autour de l'autre extremité *A* de l'axe *Aa*. Je dis que l'intersection continuelle *M* des lignes *AM*, *aD*, décrira dans ce mouvement la Section requise. FIG. LXXXII. LXXXIII.

Car menant *MP* perpendiculaire sur l'axe *Aa*, les triangles semblables *aPM*, *aGD*, donnent $aP . PM :: aG . GD$. Or les triangles rectangles *AGD*, *MPA*, sont semblables; puisque chacun des angles *GAD*; *PMA*; étant joint à l'angle *PAM*, vaut un droit; Et partant $AP. PM :: GD. GA$. Si donc l'on multiplie les Antecedens & les Consequens des deux premieres raisons, par ceux de ces deux dernieres; on aura $aP \times PA . \overline{PM}^2 :: aG \times GD . GD \times GA :: aG . GA$, c'est à dire, comme l'axe *Aa* est à son parametre. Donc * &c. *Art.41. & 81.

Il est à remarquer que plus le point *D* s'éloigne du point *G* sur la ligne *DD*; plus l'angle *PaM* augmente, & plus au contraire l'angle *PAM* diminuë; de sorte que les lignes *aM*, *AM*, deviennent paralleles dans l'Hyperbole, & se coupent ensuite de l'autre côté de la ligne *DD*, où elles décrivent par leur intersection continuelle l'Hyperbole opposée.

Si l'on conçoit dans l'Ellipse & dans l'Hyperbole, que le point *a* s'éloigne à l'infini du point *A*, ou (ce qui est la même chose) que l'axe *Aa* devienne infiniment grand; les lignes *GA*, *Da*, qui ne se rencontrent que dans l'infini, peuvent être regardées comme paralleles: ainsi cette derniere constru-

ction retombe dans le cas de la précédente. C'est pourquoi l'Ellipse ou l'Hyperbole deviendroit alors une Parabole qui auroit pour parametre la ligne *AG*; & par consequent on peut regarder une Parabole, comme une Ellipse ou une Hyperbole dont l'axe est infini : sçavoir, le premier dans l'Hyperbole, & celui des deux qu'on voudra dans l'Ellipse.

SECONDE MANIE'RE.

FIG. LXXXIV. *Pour la Parabole*. Soit un triangle isoscelle *HAL*, dont l'un des côtés *AH* soit situé sur le diametre donné *AP* prolongé indéfiniment de part & d'autre de son origine *A*, & l'autre côté *AL* sur la tangente indéfinie *LAL* qui passe par le point *A*. Soit conçûë sa base *HL* se mouvoir toujours parallelement à elle même en entraînant par l'une de ses extremités *L* la ligne indéfinie *LM* parallele à *AP*, & par l'autre extremité *H* la ligne *HF* parallele à *AL* & égale au parametre donné du diametre *AP*, laquelle entraîne aussi par son extremité *F* la droite *FA* mobile autour du point fixe *A*. Je dis que l'interfection continuelle *M* des deux droites *FA*, *LM*, décrit pendant que la ligne *HL* se meut dans l'angle *HAL* & son opposé ou sommet, la Parabole *MAM* qu'on demande.

Car menant l'ordonnée *MP* au diametre *AP*, les triangles semblables *AHF*, *APM*, donnent *AH* ou *AL* ou *PM*. *HF* :: *AP*. *PM*, & prenant $\overline{PM}^2 = AP \times HF$. Donc * &c.

* *Art.* 7. & 20.

On doit observer que le point *H* doit tomber au delà de l'origine *A* du diametre *AP*; lorsque les points *F*, *L*, tombent de part & d'autre de ce diametre.

FIG. LXXXV. LXXXVI. *Pour les autres Sections*. La construction est la même que pour la Parabole, à l'exception que la ligne *LM* doit tourner autour de l'autre extremité *a* du diametre donné *Aa*; au lieu que dans la Parabole elle lui est parallele. On suppose dans l'Hyperbole que le diametre donné est un premier diametre; car si c'étoit un second, on trouveroit selon l'article 115 du Livre troisiéme, le premier qui lui est conjugué & son parametre.

Car menant *MP* ordonnée au diametre *Aa*, les triangles semblables *aPM*, *aAL*, & *APM*, *AHF*, donnent *aP*.

PM :: aA. AL ou AH. Et AP. PM :: AH. HF. Et partant, si l'on multiplie les Antecedens & les Consequens des deux premieres raisons par ceux des deux secondes, on aura $aP \times PA . \overline{PM}^2 :: aA \times AH . AH \times HF :: aA . HF$. Donc * &c. * *Art.* 41. 55. 81. & 118.

Il faut observer que les points H, a, doivent tomber de part & d'autre du point A dans l'Ellipse, & du même côté dans l'Hyperbole, lorsque les points F, L, tombent de part & d'autre du diametre Aa.

COROLLAIRE I.

162. DE-LA on voit comment un diametre Aa étant donné avec une de ses ordonnées PM; on peut trouver son parametre HF. Car 1°. Dans la Parabole on prendra sur le diametre AP la partie AH égale à PM; & ayant tiré la ligne HF parallele à PM, & terminée en F par la ligne AM tirée de l'origine A du diametre par l'extremité M de l'ordonnée; il est clair que cette ligne HF sera le parametre du diametre AP. FIG. LXXXIV.

2°. Dans les autres Sections, on menera par l'une des extremités a du diametre donné Aa la ligne aM qui rencontre la tangente AL, qui passe par l'autre extremité A, au point L; & ayant pris sur le diametre Aa la partie AH égale à AL, on tirera HF parallele à PM, laquelle rencontrant en F la ligne AM, sera le parametre du diametre Aa. FIG. LXXXV. LXXXVI.

COROLLAIRE II.

163. ON tire de la seconde maniere qu'on vient d'expliquer, une methode uniforme & trés-exacte dans la pratique de décrire une Section Conique par plusieurs points. La voici dans l'Ellipse : & elle servira de Regle pour les autres Sections.

Ayant pris sur la tangente AL, qui passe par l'une des extremités A du diametre donné Aa, la partie AG égale à son parametre, & mené une parallele indéfinie GF à Aa; on tirera librement par le point A autant de lignes droites AF, AF, &c. qu'on voudra. Ayant pris sur la tangente indéfinie AL, les parties AL, AL, &c. égales aux correspondantes GF, GF, &c. & mené les droites aL, aL, &c; je FIG. LXXXVII

dis que les interſections *M*, *M*, &c. des droites correſpondantes *FA*, *La*, *FA*, *La*, &c. ſeront des points de l'Ellipſe qui a pour diametre la ligne *Aa*, pour tangente la ligne *AL*, & pour parametre du diametre *Aa* la ligne *AG*. Cela eſt viſible en menant *FH* parallele à *AG*, & tirant la ligne *HL* par le point *L* correſpondant au point *F*. Car le triangle
* Hyp. *HAL* ſera iſoſcelle; puiſque * *AL* eſt égale à *GF* ou *AH*, & *HF* ſera égale au parametre du diametre *Aa*: c'eſt pourquoi cette conſtruction retombe dans celle de la ſeconde des deux maniéres précédentes.

Comme les lignes *GF*, *AL*, deviennent fort grandes, lorſqu'il s'agit de trouver des points *M* qui ſoient proches du point *a*; on pourra ſe ſervir, pour trouver ces points, de la tangente *al* qui paſſe par l'autre extremité *a* du diametre *Aa*, & de la ligne *gf* parallele à *Aa*, comme l'on voit dans cette figure.

Si l'on mene les ordonnées *MP*, *MP*, &c. paralleles à la tangente *AL*, & qu'on les prolonge de l'autre côté du diametre *Aa* en *M*, *M*, &c. en ſorte qu'elles ſoient coupées cha-
* Art. 43. cune en deux également par ce diametre; il eſt clair * que ces nouveaux points *M*, *M*, &c. ſeront encore à la même Ellipſe.

On pourroit ſe ſervir d'une même ouverture de compas *GF* ou *AL* pour marquer ſur les lignes *GF*, *AL*, autant de points *F*, *F*, &c, *L*, *L*, &c, qu'on voudra; car par ce moyen toutes ces petites parties étant égales entr'elles, chaque *GF* ſeroit egale à la correſpondante *AL*; ce qui eſt le fondement de la démonſtration.

PROPOSITION XIII.

Theorême.

164. *S'il y a deux droites* MN, AR, *terminées par une Section Conique, leſquelles ſe rencontrent en un point* P, *& qui ſoient paralleles à deux droites données de poſition; je dis que le rectangle* MP × PN *ſera toujours au rectangle* AP × PR *en raiſon donnée en quelque endroit de la Section que puiſſent tomber les droites* MN, AR.

Fig. LXXXVIII. LXXXIX. XC. CXI.

POUR LA PARABOLE.

Soient (*fig.* 88.) les tangentes CB, EB, qui se rencontrent au point B, paralleles aux droites MN, AR : je dis que $MP \times PN$. $AP \times PR :: \overline{CB}^2 . \overline{EB}^2$.

Car ayant mené * par le point G milieu de MN le diametre CG, & tiré par son origine C la parallele CB à MN ; il est clair * qu'elle sera tangente en C. On menera de la même sorte la tangente EB parallele à AR, que l'on prolongera jusqu'à ce qu'elle rencontre le diametre CG au point K ; & tirant par le point touchant E l'ordonnée EL, on aura * $KC = CL$; & par consequent $KB = BE$. On tirera ensuite AD ordonnée, & AF parallele au diametre CG, & on nommera les données KB ou BE, m ; BC, n ; CK, e ; le parametre CH du diametre CG, p ; & les indéterminées AP, x ; PM ; y ; AD, r ; CD, s.

* Art. 148.
* Art. 10. & 21.
* Art. 22. & 23.

Cela posé, les triangles semblables KBC, APF, donneront $PF = \frac{nx}{m}$, AF ou $DG = \frac{ex}{m}$: Et par consequent $CG = \frac{ex}{m} + s$, GM ou $GN = y + \frac{nx}{m} + r$, PN ou $GN + GP = y + \frac{2nx}{m} + 2r$; $MP \times PN = yy + \frac{2nx}{m}y + 2ry$, $\overline{GM}^2 = yy + \frac{2nx}{m}y + 2ry + \frac{nn}{mm}xx + \frac{2nr}{m}x + rr$. Or * CD (s). CG ($\frac{ex}{m} + s$) :: $\overline{AD}^2$ (rr). $\overline{GM}^2 = rr + \frac{err}{ms}x = rr + \frac{ep}{m}x$, puisque $\overline{AD}^2$ (rr) $= CD \times CH$ (ps). Et comparant ensemble ces deux valeurs de $\overline{GM}^2$, on formera l'équation $yy + \frac{2nx}{m}y + 2ry + \frac{nn}{mm}xx + \frac{2nr}{m}x - \frac{ep}{m}x = 0$, qui convient également à tous les points de la Parabole, lorsque la ligne AR tombe au dessus du diametre CG, & que le point d'intersection P tombe entre les points A, R.

* Art. 8. & 20.

Maintenant si l'on fait dans cette équation $y = 0$, on aura (en effaçant tous les termes où y se rencontre) $\frac{nn}{mm}xx + \frac{2nr}{m}x - \frac{ep}{m}x = 0$. D'où l'on tire $x = \frac{emp}{nn} - \frac{2mr}{n} = AR$; puisque PM (y) devenant nulle ou zero, il est clair que AP (x) devient AR. Donc $AP \times PR = \frac{emp}{nn}x - \frac{2mr}{n}x - xx$; & par consequent $MP \times PN$ ($yy + \frac{2nx}{m}y + 2ry$). $AP \times PR$

$(\frac{cmp}{nn}x - \frac{2mr}{n}x - xx :: \overline{CB}^2 (nn) . \overline{EB}^2 (mm)$. puisqu'en multipliant les extrêmes & les moyens, on retrouve l'équation précedente. Or comme les tangentes *CB*, *BE* demeurent toujours les mêmes, en quelque endroit de la Parabole que tombent leurs paralleles *MN*, *AR*; il s'ensuit &c.

Il peut arriver differens cas, selon les differentes positions des droites *MN*, *AR*; mais comme la démonstration demeure toujours la même, & qu'il ne peut y avoir de changement que dans quelques lignes, ou dans quelques termes qui s'évanoüissent, je ne m'arrêterai point à les expliquer en détail. On doit observer la même chose dans les deux autres Sections.

POUR LES AUTRES SECTIONS.

Ayant mené (*fig.* 89. 90. 91.) les deux demi diametre *CO*, *CB*, paralleles aux droites *MN*, *AR*; je dis que $MP \times PN . AP \times PR :: \overline{CO}^2 . \overline{CB}^2$.

Soit mené le diametre *CG* qui ait pour double ordonnée *MN*, sur laquelle soient abaissées les droites *BE*, *AD*, paralleles à *MN*; & ayant tiré *AF* parallele à *CG*, soient nommées les données *CB*, *m*; *BE*, *n*; *CE*, *e*; & le demi-diametre *CK*, *t*; son demi-conjugué *CO*, *c*; & les indeterminées *AP*, *x*; *PM*, *y*; *AD*, *r*; *CD*, *s*.

Cela posé, les triangles semblables *CBE*, *APF*, donneront $PF = \frac{nx}{m}$, *AF* ou $DG = \frac{ex}{m}$. Par conséquent dans l'Hyperbole ou les Hyperboles opposées (*fig.* 90. & 91.) on aura $CG = \frac{ex}{m} \pm s$, *GM* ou $GN = y + \frac{nx}{m} - r$, *PN* ou $GN + GP = y + \frac{2nx}{m} - 2r$; $MP \times PN = yy + \frac{2nx}{m}y - 2ry$, $\overline{GM}^2 = yy + \frac{2nx}{m}y - 2ry + \frac{nn}{mm}xx - \frac{2nr}{m}x + rr$. Or * $\overline{CD}^2 \mp \overline{CK}^2 (ss \mp tt) . \overline{CG}^2 \mp \overline{CK}^2 (\frac{eexx}{mm} \mp \frac{2esx}{m} + ss \mp tt) :: \overline{AD}^2 (rr) . \overline{GM}^2 = rr + \frac{eerrxx \mp 2emrrsx}{mmss \mp mmtt} = rr + \frac{eeccxx \mp 2eccmsx}{mmtt}$,

* Art.82. & 118.

en mettant pour $\frac{rr}{ss \mp tt}$ sa * valeur $\frac{cc}{tt}$. Et comparant ensemble ces deux valeurs de $\overline{GM}^2$, on formera l'équation $yy + \frac{2nx}{m}y - 2ry + \frac{nntt - ccee}{mmtt}xx - \frac{2nrtt \mp 2eccs}{mtt}x = 0$, dans laquelle mettant à la place de $nntt - ccee$ sa valeur $cctt$ (il faut

* Art.82. & 118.

imaginer l'Hyperbole conjuguée qui passe * par l'extremité B, * *Art.* 134.
lorsque CB est la moitié d'un second diametre) tirée de ce que
* $\overline{CE}^2 + \overline{CK}^2 (ee + tt) . \overline{EB}^2 (nn) :: \overline{CK}^2 (tt) . \overline{CO}^2 (cc)$. * *Art.* 81. & 108.
on aura celle-ci $yy + \frac{2nx}{m} y - 2ry + \frac{cc}{mm} xx - \frac{2nrtt \mp 2ccrs}{mtt}$
$x = o$, qui convient à tous les points de la Section, lorsque les points A, R, tombent de part & d'autre du diametre CG, & que le point d'intersection P tombe entre les points A, R.

Maintenant si l'on fait dans cette équation $y = o$, on aura (en effaçant tous les termes où y se rencontre) $\frac{cc}{mm} xx - \frac{2nrtt \mp 2ccrs}{mtt} x = o$, d'où l'on tire $x = \frac{2mnrtt \mp 2ccrms}{cctt} = AR$; puisque $PM (y)$ devenant nulle ou zero, il est clair que $AP (x)$ devient AR. Donc $AP \times PR \left(\frac{2mnrtt \mp 2mcccs}{cctt} x - xx \right)$. $MP \times PN \left(yy + \frac{2nx}{m} y - 2ry \right) :: \overline{CB}^2 (mm) . \overline{CO}^2 (cc)$. Car multipliant les extrêmes & les moyens de cette proportion, on retrouve l'équation précédente. Or comme les demi-diametres CO, CB, demeurent toujours les memes en quelque endroit de la Section que tombent leurs paralleles MN, AR; il s'ensuit &c.

Je ne mets point ici en particulier le calcul pour l'Ellipse, parce qu'il ne differe de celui de l'Hyperbole qu'en quelques lignes.

COROLLAIRE I.

165. S'IL y a deux lignes droites MN, AR, terminées par une Section Conique, lesquelles se rencontrent en un point P; & qu'on mene par tout où l'on voudra deux autres droites FG, HD, paralleles aux deux premieres, & terminées aussi par la Section, lesquelles se rencontrent en un point Q : il est clair que $MP \times PN . AP \times PR :: FQ \times QG . BQ \times QD$. Car les deux droites AR, BD, étant paralleles entr'elles, seront paralleles à la même droite CZ donnée de position; comme aussi les deux droites MN, FG, à la même droite CY donnée pareillement de position. FIG. XCII.

COROLLAIRE II.

166. S'IL y a deux paralleles AR, BD, terminées par une Section Conique, lesquelles rencontrent aux points E, Q, une

ligne droite FG terminée par la même Section; je dis que $FE \times EG . AE \times ER :: FQ \times QG . BQ \times QD$. Car concevant dans le premier Corollaire que MN tombe sur FG, il est clair que les rectangles $MP \times PN$, $AP \times PR$, deviennent $FE \times EG$, $AE \times ER$.

COROLLAIRE III. POUR LE CERCLE.

167. FIG. XCIII. ON peut tirer de ce Theorême la proprieté du Cercle, qui est si connuë de tous les Geometres; sçavoir que si par un point quelconque P pris au dedans ou au dehors d'un cercle, on mene autant de lignes qu'on voudra AR, MN, HL, &c. terminées par la circonference, les rectangles $AP \times PR$, $MP \times PN$, $HP \times PL$, &c. seront tous égaux entr'eux. Car menant les demidiametres CB, CO, CD, &c. paralleles à ces lignes, il est clair par le Theorême, que tous rectangles seront entr'eux, comme les quarrés de ces demi-diametres ou rayons, lesquels par la proprieté essentielle du cercle sont tous égaux entr'eux.

COROLLAIRE IV. POUR LA PARABOLE.

168. FIG. XCIV. S'IL y a une ligne droite MN terminée par une Parabole; & qu'on mene par un des points quelconques A de la Parabole un diametre AF qui rencontre cette ligne au point F: je dis que le rectangle $MF \times FN$ est égal au rectangle de AF par le parametre CH du diametre CG, qui passe par le milieu de MN.

Car concevant dans le Theorême que AP tombe sur AF, il est clair que la ligne PF ($\frac{n}{m}x$) devient nulle ou zero, & qu'ainsi $\frac{n}{m} = 0$. C'est pourquoi effaçant dans l'équation à la Parabole $yy + \frac{2nx}{m}y + 2ry + \frac{nn}{mm}xx + \frac{2nr}{m}x - \frac{ep}{m}x = 0$, tous les termes ou $\frac{n}{m}$ se rencontre, on en formera celle-ci $yy + 2ry - \frac{ep}{m}x = 0$. Or $AF = \frac{ex}{m}$, $CH = p$, & $MF \times FN = yy + 2ry$. Donc &c.

Ce n'est que pour faire voir la généralité du Theorême, que j'en déduis cette proprieté; car on la peut démontrer plus aisément sans y avoir recours, en cette sorte. $\overline{GM}^2 = GC \times CH$, $\overline{AD}^2$ ou $\overline{GF}^2 = DC \times CH$, & partant $\overline{GM}^2 - \overline{GF}^2$ ou $MF \times FN = \overline{GC - DC} \times CH = AF \times CH$.

COROLLAIRE

COROLLAIRE V. POUR LA PARABOLE.

169. DE-LA il est évident;

1°. Que s'il y a deux droites MN, EL, terminées par une Parabole, & paralleles entr'elles; & qu'on mene par deux points quelconques A, B, de cette Parabole, deux diametres AF, BP, qui rencontrent ces lignes aux points F, P: il est évident, dis-je, que $MF \times FN . EP \times PL :: AF . BP$. Car le diametre CG qui passe par le milieu de MN, passe aussi par le milieu de EL; & par consequent le rectangle $EP \times PL = BP \times CH$, de même que $MF \times FN = AF \times CH$.

2°. Que s'il y a une ligne droite MN terminée par une Parabole, & qui rencontre deux de ses diametres AF, BK, aux points F, K; on aura $MF \times FN . MK \times KN :: AF . BK$.

3°. Que s'il y a deux lignes droites MN, EL, terminées par une Parabole, & paralleles entr'elles, qui rencontrent un de ses diametres quelconques BP aux points K, P; on aura $MK \times KN . EP \times PL :: BK . BP$.

COROLLAIRE VI. POUR LA PARABOLE.

170. DE-LA on voit comment on peut décrire une Parabole qui passe par trois points donnés A, M, N, & dont les diametres AF, CG, soient paralleles à une ligne droite donnée de position; & démontrer qu'il ne peut y en avoir qu'une seule.

Car ayant mené une ligne MN qui joigne deux des points donnés M, N; on tirera par le troisiéme A un diametre AF parallele à la ligne donnée de position, & qui rencontre la ligne MN au point F, & par le point de milieu G de MN une parallele GC à AF. On fera ensuite $MF \times FN . MG \times GN$, ou $\overline{GM}^2 :: AF . GC$. Et ayant pris CH troisiéme proportionnelle à CG, GM, on décrira * du parametre CH, & du diametre CG dont l'origine est en C, une Parabole dont les ordonnées soient paralleles à MN; elle satisfera à la question. *Art. 29. & 30.

Car 1°. Elle passera * par les points M, N; puisque par *Art. 7. & 30.

la conſtruction $CH \times CG = \overline{GM}^2$ ou $\overline{GN}^2$. 2°. Elle paſſera par le point A; puiſque $MG \times GN. MF \times FN :: CG. FA$. 3°. Les diametres AF, CG, ſeront paralleles à la droite donnée de poſition.

Comme la Parabole qui ſatisfait au Problême, a neceſſairement pour diametre la ligne CG, qui a pour origine le point C, & pour parametre la ligne déterminée CH; il s'enſuit qu'il ne peut y en avoir qu'une ſeule.

COROLLAIRE VII. POUR LA PARABOLE.

171. FI LXXXVIII S'IL y a deux droites AR, MN, terminées par une Parabole, leſquelles ſe rencontrent en un point P; & qu'ayant fait $AP \times PR. MP \times PN :: \overline{AP}^2. \overline{PF}^2$. on tire la ligne AF: je dis que cette ligne ſera un diametre. Car ayant mené les tangentes CB, EB, paralleles aux droites MN, AR, & par le point touchant C le diametre CG qui rencontre EB prolongée en K; on aura $\overline{EB}^2$ ou $\overline{KB}^2. \overline{BC}^2 :: AP \times PR. MP \times PN :: \overline{AP}^2. \overline{PF}^2$, & par conſequent $KB. CB :: AP. PF$. Les triangles KBC, APF ſeront donc ſemblables, & leurs côtés AF, KC, paralleles entr'eux : d'où il ſuit que la ligne AF qui ſe trouve ainſi parallele au diametre CG, ſera un diametre; puiſ-
* Def. 7, I. que dans la Parabole * tous les diametres ſont paralleles entr'eux.

COROLLAIRE VIII. POUR LA PARABOLE.

ON tire du Corollaire précédent une maniére de décrire une Parabole qui paſſe par quatre points donnés A, M, R, N.

Car ayant joint ces quatre points par deux droites AR, MN, qui s'entrecoupent en un point P, & fait $AP \times PR$.
* Art. 170. $MP \times PN :: \overline{AP}^2. \overline{PF}^2$; on tirera la ligne AF, & on décrira * une Parabole qui paſſe par les trois points A, M, N, & dont les diametres ſont paralleles à la ligne AF. Elle ſera celle qu'on demande; car ſelon le Theorême la ligne AP doit rencontrer cette Parabole en un point R, tel que $AP \times PR. MP \times PN :: \overline{EB}^2$, ou $\overline{KB}^2. \overline{BC}^2 :: \overline{AP}^2. \overline{PF}^2$.

Si l'on eut pris le point F de l'autre côté du point P, on Fig. XCV.
auroit décrit une autre Parabole qui auroit encore passé par les quatre points donnés. Mais l'on doit remarquer que lorsqu'un de ces points F tombe sur l'un des points donnés M ou N, il ne peut y avoir qu'une Parabole qui satisfasse; & que lorsque tous les deux tombent sur les points M, N, il n'y en peut avoir aucune : puisqu'alors le diametre AF de la parabole passeroit par deux de ses points, ce que l'on a démontré * Art. 10.
* être impossible.

COROLLAIRE IX.

POUR L'HYPERBOLE OU LES HYPERBOLES OPPOSE'ES.

173. S'IL y a une ligne droite MN terminée par une Hyperbole Fig. XCVI. XCVII.
ou par des Hyperboles opposées, laquelle rencontre une asymptote CB au point Q, & qui soit parallele à une ligne donnée de position; & qu'on tire par un point quelconque A de la Section une droite AP parallele à cette asymptote, & qui rencontre au point P la ligne MN : je dis que le rectangle $MP \times PN$ sera toujours au rectangle $2\,AP \times PQ$ en raison donnée, en quelque endroit de la Section que tombent les droites MN, AP.

Car concevant dans le Theorême (*fig* 90. 91.) que le demi-diametre CB devienne une asymptote, il est clair * qu'alors * Art. 102.
les trois côtés du triangle CBB deviennent chacun infini. C'est pourquoi menant (*fig.* 96. 97.) par l'extremité K du diametre LK qui passe par le milieu de MN, une parallele KS à MN, qui rencontre l'asymptote CB en S, on formera un triangle CKS dont tous les côtés seront finis, & qui sera semblable au triangle CBE; & partant on aura CK (t). KS ou * CO (c) :: CE (e). EB (n). Ce qui donne $ce = nt$. Si l'on * Art. 113.
met à la place de ce sa valeur nt dans l'équation à l'Hyperbole $yy + \frac{2nx}{m}y - 2ry + \frac{nntt - ccee}{mmtt}xx - \frac{2nrtt \mp 2ncee}{mtt}x = 0$ que l'on a trouvée dans le Theorême, on en formera celle-ci $yy + \frac{2nx}{m}y - 2ry - \frac{2nrt \mp 2nct}{mt}x = 0$ ou $yy + \frac{2nx}{m}y - 2ry = \frac{2nrt \pm 2nct}{mt}x$. Or en prolongeant AD, s'il est necessaire, jusqu'à ce qu'elle rencontre l'asymptote CB en H, les

triangles ſemblables CKS, CDH, donneront $CK\ (t).\ KS\ (c) :: CD\ (s).\ DH = \frac{cs}{t}$. Et partant AH ou $PQ = \frac{rt \pm cs}{t}$. On aura donc $MP \times PN\ (yy + \frac{2nx}{m}y - 2ry).\ 2AP \times PQ\ (\frac{2rt \pm 2cs}{t}x) :: EB\ (n).\ CB\ (m) :: KS.\ CS$. Puiſqu'en multipliant les extrêmes & les moyens on retrouve l'équation précédente. Or les lignes KS, CS, demeurent toujours les mêmes en quelque endroit de la Section que tombent les droites MN, AP; parce que le diametre LK qui paſſe par le milieu
*Art. 145. de MN, paſſe auſſi * par le milieu de toutes les paralleles à MN terminées par la Section, en quelque endroit qu'elles ſe rencontrent. Donc, &c.

FIG. XCVI. On peut démontrer ce Corrollaire immédiatement, & ſans avoir recours au Theorême, en cette ſorte. Soient les données $CK = t$, KS ou $CO = c$, $CS = m$, & les indéterminées $CD = s$, AD ou $DI = r$, $AP = x$, $PM = y$. Les triangles ſemblables CSK, APF, donnent $PF = \frac{cx}{m}$, AF ou $DG = \frac{sx}{m}$; Et partant GM ou $GN = y + \frac{cx}{m} - r$, $CG = \frac{sx}{m} + s$. Or à cauſe des triangles ſemblables CKS, CDH, CGQ, on aura $CK\ (t).\ KS\ (c) :: CD\ (s).\ DH = \frac{cs}{t} :: CG\ (\frac{sx}{m} + s).\ GQ = \frac{cx}{m} + \frac{cs}{t}$. Et partant $MQ \times QN$ ou $\overline{GQ}^2 - \overline{GM}^2 = \frac{2ccsx}{mt} + \frac{ccss}{tt} - yy - \frac{2cxy}{m} + 2ry + \frac{2crx}{m} -$
*Art. 97. $rr =$ * $AH \times HI$ ou $\overline{DH}^2 - \overline{DI}^2 = \frac{ccss}{tt} - rr$; d'où l'on tire (en effaçant de part & d'autre $\frac{ccss}{tt} - rr$, & tranſpoſant d'une part tous les termes où y ſe rencontre) cette équation $yy + \frac{2cxy}{m} - 2ry = \frac{2ccsx}{mt} + \frac{2crx}{m}$, laquelle étant reduite en proportion, donne $MP \times PN\ (yy + \frac{2cxy}{m} - 2ry).\ 2AP \times PQ\ (\frac{2csx}{t} + 2rx) :: KS\ (c).\ CS\ (m)$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

La démonſtration eſt la même pour les Hyperboles oppoſées à quelques ſignes près.

COROLLAIRE X.

POUR L'HYPERBOLE OU LES HYPERBOLES OPPOSE'ES.

174. Il ſuit du Corollaire précedent.

FIG. XCVIII. 1°. Que s'il y a deux droites paralleles entr'elles MN, HG, terminées par une Hyperbole ou par des Hyperboles oppoſées, & qui rencontrent une aſymptote CS aux points Q, I;

& qu'on mene par deux points quelconques A, B, de la Section deux paralleles AP, BD, à l'aſymptote CS, qui rencontrent ces lignes aux points. P, D: les rectangles $MP \times PN$, $2AP \times PQ$ ſeront entr'eux, comme les rectangles $HD \times DG$, $2BD \times DI$; & partant on aura $MP \times PN . HD \times DG :: AP \times PQ . BD \times DI$.

2°. Que s'il y a deux droites paralleles entr'elles MN, HG, terminées par une Hyperbole ou par des Hyperboles oppoſées, & qui rencontrent une aſymptote CS aux points Q, I; & qu'on mene par un point quelconque A de la Section, une parallele AO à CS, qui rencontre ces lignes aux points P, O: on aura (en concevant dans le cas précédent que BD tombe ſur AP) cette proportion, $MP \times PN . HO \times OG :: AP \times PQ . AO \times OI :: AP . PO$. quiſque $PQ = OI$.

3°. Que s'il y a une ligne droite HG terminée par une Hyperbole ou par des Hyperboles oppoſées; & qui rencontre une aſymptote CS en I; & qu'on mene par deux points quelconques de la Section A, B, deux paralleles AO, BD, à CS, qui rencontrent cette ligne aux points O, D: on aura $HO \times OG . HD \times DG :: AO \times OI . BD \times DI$. Cela eſt encore une ſuite du premier cas, en concevant que la ligne MN tombe ſur HG.

COROLLAIRE XI.

175. Si l'on conçoit qu'une ligne droite BD qui rencontre une Section Conique en deux points B, D, ſe meuve parallelement à elle-même juſqu'à ce qu'elle raſe la Section, c'eſt à dire, juſqu'à ce qu'elle devienne la tangente LS: il eſt clair que les deux points d'interſection B, D, ſe rëüniſſent alors au point touchant L; & qu'ainſi on peut conſiderer un point touchant comme deux points d'interſection qui tombent l'un ſur l'autre. Or cela poſé, on voit naître des Corollaires 1, 2, 5, 10, pluſieurs cas dont voici les principaux. FIG. XCII.

1°. S'il y a deux tangentes KS, LS, qui ſe rencontrent en un point S, & deux autres droites MN, AR, paralleles à ces tangentes & terminées par la Section, leſquelles ſe rencontrent en un point P; je dis que $MP \times PN . AP \times PR :: \overline{KS}^2 . \overline{LS}^2$. Ceci a été démontré dans le Theorême à l'égard de la Parabole: mais pour les autres Sections, concevant dans

le premier Corollaire que *FG* tombe ſur la tangente *KS*, & *BD* ſur *LS*; il eſt clair que les deux points d'interſection *F*, *G*, ſe réüniſſent au point touchant *K*, comme auſſi les deux *B*, *D*, au point touchant *L*; & qu'ainſi les rectangles $FQ \times QG$, $BQ \times QD$, deviennent les quarrés $\overline{KS}^2 . \overline{LS}^2$.

2°. Si dans une Ellipſe ou dans des Hyperboles oppoſées, l'on mene une tangente *TX* parallele à *KS*, & qui rencontre *SL* au point *X*, on prouvera comme dans le nombre précédent, que $MP \times PN . AP \times PR :: \overline{TX}^2 . \overline{LX}^2$. D'où il ſuit que $\overline{KS}^2 . \overline{LS}^2 :: \overline{TX}^2 . \overline{LX}^2$. Et $KS . SL :: TX . LX$. C'eſt à dire, que ſi deux tangentes paralleles *KS*, *TX*, rencontrent une troiſiéme tangente *LS* aux points *S*, *X*, on aura $KS . LS :: TX . LX$. ou $KS . TX :: LS . LX$.

3°. Si dans une Ellipſe, dans une Hyperbole ou dans des Hyperboles oppoſées, il y a deux tangentes *KS*, *LS*, qui ſe rencontrent en un point *S*, & qu'on mene deux demi-diametres *CY*, *CZ* paralleles à ces tangentes; je dis qu'elles ſeront entr'elles comme ces deux demi-diametres. Car ſelon le Theorême $\overline{CY}^2 . \overline{CZ}^2 :: MP \times PN . AP \times PR :: \overline{KS}^2 . \overline{LS}^2$, ſelon le nombre premier. Et par conſequent $CY . CZ :: KS . LS$.

4°. S'il y a deux droites *AR*, *FG*, terminées par une Section Conique, leſquelles rencontrent deux tangentes *KI*, *LO*, qui leur ſoient paralleles, aux points *I*, *O*; je dis que $FO \times OG . \overline{LO}^2 :: \overline{KI}^2 . AI \times IR$. Ce qui eſt évident en concevant dans le premier Corollaire que *BD* devient la tangente *LO*; & *MN*, la tangente *KI*.

5°. S'il y a deux paralleles *AR*, *BD*, terminées par une Section Conique, leſquelles rencontrent une tangente *KH* aux points *I*, *H*; je dis que $\overline{KI}^2 . AI \times IR :: \overline{KH}^2 . BH \times HD$, ou $\overline{KI}^2 . \overline{KH}^2 :: AI \times IR . BH \times HD$. Ce qui eſt une ſuite du ſecond Corollaire, en concevant que la ligne *FG* tombe ſur la tangente *KH*.

6°. Si l'on ſuppoſe dans le nombre précédent que la Section Conique ſoit une Hyperbole, & que la tangente *HK* en ſoit une aſymptote; les rectangles $BH \times HD$, $AI \times IR$ deviendront égaux entr'eux. Car le point touchant *K* ſera * alors

* *Art.* 108.

infiniment éloigné des points H, I; & par conféquent les droites infinies HK, IK, qui ne different entr'elles que d'une grandeur finie HI, doivent être regardées comme égales. Ceci a déja été démontré dans l'article 97. & on ne le repete ici que pour fervir de preuve à ce que l'on vient de dire, & pour faire voir qu'on arrive fouvent aux mêmes verités par des routes bien differentes.

7°. S'il y a deux tangentes KS, LS, qui fe rencontrent en un point S, avec une ligne droite AR terminée par la Section, parallele à l'une d'elles LS, & qui rencontre l'autre KS en un point I; je dis que $\overline{KI}^2 . AI \times IR :: \overline{KS}^2 . \overline{LS}^2$. Cela eft vifible en concevant dans le fecond Corollaire que les lignes FG, BD, tombent fur les tangentes KS, LS.

8°. S'il y a dans une Ellipfe ou dans les Hyperboles oppofées deux tangentes paralleles KI, TV, qui rencontrent aux points I,V, une ligne AR terminée par la Section aux points R, A; je dis que $\overline{KI}^2 . AI \times IR :: \overline{TV}^2 . RV \times VA$. Cela fuit encore du fecond Corollaire en imaginant que les paralleles MN, FG, tombent fur les tangentes TV, KI.

9°. S'il y a dans une Parabole deux paralleles MN, CH, dont l'une foit tangente en C, & l'autre foit terminée par la Parabole; & qu'on mene par deux points quelconques A, B, de la Section, deux diametres, AF, BO qui rencontrent ces lignes aux points F, O: il eft clair en concevant dans les deux premiers nombres du Corollaire fixiéme que EL tombe fur la tangente CH; 1°. Que $MF \times FN . \overline{CO}^2 :: AF . BO$. 2°. Que fi l'on prolonge FA jufqu'à ce quelle rencontre la tangente CH en Q, on aura $MF \times FN . \overline{CQ}^2 :: AF . AQ$. FIG. XCIV.

10°. S'il y a deux paralleles MN, KT, dont l'une KT touche une Hyperbole en K & rencontre une de fes afymptotes en S, & l'autre MN eft terminée par l'une ou par l'autre des Hyperboles oppofées, & rencontre la même afymptote en Q; & qu'on mene par deux points quelconques A, B, de la Section, deux paralleles AP, BT, à l'afymptote CS, lefquelles rencontrent ces lignes aux points P, T; on aura (en concevant dans les trois nombres du Corollaire dixieme, que la fecante GH tombe fur la tangente RT) 1°. Le rectangle $MP \times PN . \overline{KT}^2 :: AP \times PQ . BT \times TS$. 2°. En pro- FIG. XCVIII.

longeant *PA* jusqu'à ce qu'elle rencontre *KT* en *R*, le rectangle $MP \times PN . \overline{KR}^2 :: AP . AR$. 3°. Le quarré $\overline{KT}^2 . \overline{KR}^2 :: BT \times TS . AR \times RS$.

11°. S'il y a dans les Hyperboles opposées deux tangentes paralleles *KR*, *LF*; qui rencontrent une asymptote *CS* aux points *S*, *V*; & qu'on mene par deux points quelconques *A*, B, de la Section, deux paralleles *AR*, *BF* à l'asymptote *CS* lesquelles rencontrent ces tangentes aux points *R*, *F*: on aura (en concevant dans les deux premiers nombres du Corollaire dixiéme, que les deux Secantes *MN*, *GH*, tombent sur les deux tangentes *KR*, *LF*) 1°. Le quarré $\overline{KR}^2 . \overline{LF}^2 :: AR \times RS . BF \times FV$. 2°. Le quarré $\overline{KR}^2 . \overline{LE}^2 :: AR . AE$.

PROPOSITION XIV.

Problême.

176. Fig. XCIX. C. & CI. *DECRIRE une Ellipse ou deux Hyperboles opposées autour d'un parallelogramme donné* FGHK, *& dont l'un de ses diametres* AB *parallele aux deux côtez* FK, GH, *soit à son conjugué* DE, *en la raison donnée de* m *à* n.

Ayant méné les lignes *AB*, *DE*, qui coupent par le milieu les côtés opposés du parallelogramme donné *FGHK*, il
* *Art.* 146. est clair * qu'elles feront sur deux diametres conjugués de la Section qu'on demande, & qu'ainsi leur point d'interfection en fera le centre; puisque selon l'une des conditions du Problême, les paralleles *FG*, *KH*, doivent être terminées par la Section, aussi bien que les deux autres paralleles *FK*, *GH*. Or cela posé, si l'on prend *AB*, *DE*, pour ces deux diametres conjugués, & qu'on nomme (les points *L*, *O*, coupant en deux parties égales les lignes *FG*, *KH*,) les données *CL* ou *CO*, *a*; *LF* ou *OK*, *b*; & l'inconnuë *CA* ou *CB*, *t*; on
* *Art.* 41. & 55. aura 1°. Lorsque * la Section est une Ellipse, $BL \times LA\ (tt - aa) . \overline{LF}^2\ (bb) :: \overline{AB}^2 . \overline{DE}^2 :: mm . nn$. Et partant $tt = aa + \frac{mmbb}{nn}$.
* *Art.* 81. & 118. 2°. Lorsque * la Section doit être deux Hyperboles opposées, $\overline{CL}^2 \mp \overline{CA}^2\ (aa \mp tt) . \overline{LF}^2\ (bb) :: \overline{AB}^2 . \overline{DE}^2 :: mm . nn$, ce qui donne $tt = aa - \frac{mmbb}{nn}$ ou $tt = \frac{mmbb}{nn} - aa$; sçavoir

$tt = aa$

$tt = aa - \frac{mmbb}{nn}$ lorsque la ligne AB est un premier diametre, & $tt = \frac{mmbb}{nn} - aa$ lorsque c'est un second. D'où l'on tire la construction suivante que je distingue en trois differens cas.

Premier cas. Lorsque la Section est une Ellipse ; soit fait un triangle rectangle VST dont l'un des côtés $ST = CL$, & l'autre $SV = \frac{m}{n} LF$; & soit décrit du demi-diametre $CA = TV$, qui soit à son demi-conjugué CD, comme m est à n, une Ellipse: Je dis qu'elle satisfera au Problême. Car 1°. Le diametre AB parallele aux côtés FK, GH, est à son conjugué DE, en la raison donnée de m à n. 2°. A cause du triangle TSV rectangle en S, le quarré $\overline{TV}^2$ ou $\overline{CA}^2$ $(tt) = \overline{TS}^2$ $(aa) + \overline{SV}^2$ $(\frac{mmbb}{nn})$; & partant $BL \times LA$ $(tt - aa) = \frac{mmbb}{nn}$: c'est pourquoi l'on aura $BL \times LA$ $(\frac{mmbb}{nn}$. $\overline{LF}^2$ (bb) :: mm. nn :: $\overline{AB}^2$. $\overline{DE}^2$. D'où l'on voit que LF est une ordonnée au diametre AB ; & qu'ainsi la Section passe par le point F. On prouvera de même que la Section passera par les points G, H, K; puisque $GL = LF = OK = OH$, & que $CO = CL$.

Second cas. Lorsque la Section doit être deux Hyperboles opposées, & que CL est plus grande que $\frac{m}{n} LF$: soit formé un triangle TSV rectangle en S, dont l'un des côtés $SV = \frac{m}{n} LF$, & l'hypothenuse $VT = CL$; & soient décrites du premier demi-diametre $CA = TS$, qui soit à son demi-conjugué CD, comme m est à n, deux Hyperboles opposées.

Troisiéme cas. Lorsque la Section doit être deux Hyperboles opposées, & que CL est plus petite que $\frac{m}{n} LF$: on formera un triangle TSV rectangle en T dont l'un des côtés $TS = CL$, & l'hypothenuse $SV = \frac{m}{n} LF$. On décrira ensuite du second demi-diametre $CA = TV$, qui soit à son demi-conjugué CD, comme m est à n, deux Hyperboles opposées.

La démonstration de ces deux derniers cas est semblable à celle du premier, mais il faut remarquer que lorsque $CL = \frac{m}{n} LF$, le Problême est impossible.

COROLLAIRE I.

177. COMME la position des deux diametres conjugués AB, DE, est déterminée, aussi bien que leur grandeur ; puisque selon les conditions du Problême ils doivent couper par le mi-

lieu les côtés opposés du parallelogramme, & qu'on ne trouve pour le demi-diametre CA ou CB qu'une seule valeur : il s'ensuit qu'il ne peut y avoir qu'une seule Section qui satisfasse.

COROLLAIRE II.

178. DE LA on voit comment on peut décrire une Section Conique autour d'un parallelogramme donné $FGHK$, & qui passe par un point donné M.

Car ayant mené les deux diametres conjugués AB, DE, qui coupent par le milieu les côtés opposés du parallelogramme, & du point donné M l'ordonnée MP au diametre AB, laquelle rencontre les côtés opposés FK, GH, aux points R, Q. & la Section (que je suppose décrite) au point N; il est clair que $PN = PM$, & qu'ainsi $RN = QM$, puisque $PR = PQ$. Le rectangle $RM \times MQ$ sera donc égal au rectangle $RM \times RN$. Or * $FR \times RK . MR \times RN$ ou $RM \times MQ :: \overline{AB}^2 . \overline{DE}^2$. Et par consequent la raison du diametre AB parallele aux côtés FK, GH, à son conjugué DE, est donnée; puisque les rectangles $FR \times RK$, $RM \times MQ$, sont donnés. De plus la Section sera une Ellipse, lorsqu'entre les deux ordonnées MP, KO, au diametre AB, qui tombent du même côté du centre C, celle qui est la plus proche du centre est plus grande que la plus éloignée ; & au contraire deux Hyperboles opposées, lorsqu'elle est plus petite. D'où l'on voit que cette question se reduit au Problême précédent.

* Art. 164.

Si le point donné M tomboit sur l'un des côtés du parallelogramme, prolongé à discrétion ; il est clair que ce Problême seroit alors impossible, puisque ce côté rencontreroit la Section en trois differens points ; ce qui ne peut * être.

* Art. 149.

COROLLAIRE III.

179. DE LA on tire encore la maniére de décrire une Section Conique, qui ait pour diametre une ligne AB donnée de position, pour centre le point donné C, & pour deux ordonnées à ce diametre les droites MP, KO.

Car ayant pris sur le diametre AB la partie CL égale à CO, & mené LF parallele & égale à OK; il est clair qu'elle sera * une ordonnée au diametre AB, & qu'ainsi prolongeant

* Art. 45. 55. 85. & 118.

KO en *H*, & *FL* en *G*, en sorte que *OH* = *OK*, & *LG* = *LF*, les droites égales & paralleles *KH*, *FG*, seront * deux doubles ordonnées au diametre *AB*. D'où l'on voit que la Section doit être décrite autour du parallelogramme *FGHK*, & passer par le point donné *M*; ce qui se fera par le moyen du Corollaire précédent. * *Art.* 144.

Comme cette question se réduit à celle du Corollaire précédent, qui se réduit au Problême; & que selon le Corollaire premier, on ne peut trouver qu'une seule Section qui y satisfasse: il s'ensuit de même qu'on ne peut décrire qu'une seule Section qui remplisse les conditions de ce dernier Corollaire.

PROPOSITION XV.

Problême.

180. DÉCRIRE *une Section Conique qui passe par cinq points donnés* F, M, K, G, N; *& démontrer qu'il n'y en peut avoir qu'une seule.* FIG. CII. & CIII.

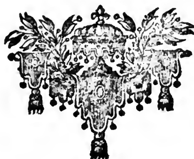
Ayant joint quatre des points donnés par deux lignes droites *FG*, *MN*, qui se rencontrent au point *R*, on menera par le cinquiéme point donné *K* deux droites *KD*, *KH*, paralleles aux droites *FG*, *MN*, & qui les rencontrent aux points *E*, *Q*. On prendra sur ces deux lignes prolongées, s'il est necessaire, les points *D*, *H*, tels que *MR* × *RN*. *GR* × *RF* :: *ME* × *EN*. *KE* × *ED*. Et *FR* × *RG*. *MR* × *RN* :: *FQ* × *QG*. *HQ* × *QK*. en observant que les points *K*, *D*, ou *K*, *H*, doivent tomber de part & d'autre du point de rencontre *E*, ou *Q*, lorsque les points *M*, *N*, ou *F*, *G*, tombent aussi de part & d'autre de ce même point; & au contraire. On menera ensuite par les points de milieu des paralleles *DK*, *FG*, & *MN*, *KH*, les droites *LI*, *AB*, qui s'entrecoupent au point *C*. On décrira enfin * la Section Conique qui a pour diametre la ligne *AB* donnée de position, pour centre le point donné *C*, & pour ordonnées les deux droites *MP*, *KO*. Je dis qu'elle satisfera au Problême, & qu'il ne peut y avoir que celle-là. * *Art.* 179.

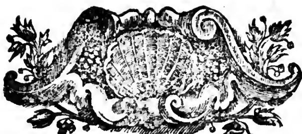
Car les deux points *D*, *H*, seront * à la Section qui passe par les cinq points donnés *F*, *M*, *K*, *G*, *N*; & ainsi les lignes *LI*, *AB*, en seront * deux diametres, qui en détermineront par conséquent le centre par leur point d'interfection *C*. Il * *Art.* 166. * *Art.* 146. & 147.

eſt donc évident que la Section Conique qui paſſe par les cinq points donnés, doit avoir néceſſairement pour diametre la ligne AB donnée de poſition, pour centre le point C, & pour ordonnées au diametre AB les droites MP, KO. Or comme il n'y a qu'une ſeule Section Conique qui puiſſe remplir ces conditions, il s'enſuit que ce ſera celle qu'on demande, & qu'il ne peut y avoir que celle-là.

S'il arrive que les diametres AB, LI, ſoient paralleles entr'eux; la Section ſera alors * une Parabole qu'on décrira par l'article 170.

* *Art.* 147.





LIVRE CINQUIÉME.

De la comparaison des Sections Coniques entr'elles, & de leurs Segmens.

LEMME I.

181. *SI la difference de deux quantités diminuë continuellement, en sorte qu'elle devienne enfin moindre qu'aucune grandeur donnée ; je dis que dans cet état, ces deux quantités seront égales.*

Car si elles ne l'étoient pas, on pourroit assigner entr'elles quelque difference ; ce qui est contre l'hypothese.

LEMME II.

182. *SI la raison de deux quantités est telle que l'antecedent demeurant toujours le même, sa difference avec son consequent diminuë continuellement, en sorte qu'elle devienne enfin moindre qu'aucune grandeur donnée ; je dis que dans cet état, ces deux quantités seront égales.*

Car par le Lemme * précedent, l'antecedent sera égal à son consequent ; & ainsi les quantités dont ils expriment le rapport, seront égales. * *Art.* 181.

LEMME III.

183. *SI l'on suppose sur une ligne courbe quelconque* ABG *un arc* MN *infiniment petit, c'est à dire, moindre qu'aucune grandeur donnée ; & qu'on imagine par les extremités de cet arc les ordonnées* MP, NQ, *à l'axe ou diametre* AC, *avec les paral-* FIG. CIV.

leles MR, NS, *à ce diametre : je dis que les parallelogrammes* PQRM, PQNS, *peuvent être pris chacun pour l'espace* PQNM *renfermé entre les ordonnées* PM, QN, *la petite droite* PQ, *& le petit arc de la courbe* MN.

Tous les points d'une ligne courbe ou s'éloignent continuellement de plus en plus de son diametre, ou bien s'en approchent continuellement de plus en plus; ou enfin cette ligne courbe est composée de plusieurs portions, dont les unes s'éloignent de plus en plus, & les autres s'approchent de plus en plus de son diametre. Car il est évident qu'il ne peut y avoir aucune portion dans une ligne courbe, dont tous les points soient également éloignés de son diametre; puisqu'alors cette portion ne seroit plus courbe, mais une ligne droite parallele à ce diametre.

Supposons 1°. Que l'arc *MN* soit sur une courbe *AMB* dont tous les points s'éloignent de plus en plus de son diametre *AC*. Si l'on prend du côté du point *N* l'arc *MO* d'une grandeur finie, & qu'ayant nommée l'ordonnée *OF* parallele à *MP*, on tire les droites *OD*, *ME*, paralleles au diametre *AC*; il est clair que l'espace Curviligne *PFOM* sera plus grand que le parallelogramme inscrit *PFEM*, & moindre que le parallelogramme circonscrit *PFOD*. Or si l'on imagine que le point *O* se meuve suivant la courbe vers le point *M*, il est visible que le parallelogramme *MEOD* qui est la difference des parallelogrammes inscrits & circonscrits à l'arc *OM*, diminuëra continuellement jusqu'à ce qu'enfin il devienne nul ou zero dans l'instant que le point *O* parvient en *M*. D'où il suit que lorsque le point *O* est arrivé en *N*, c'est à dire, infiniment près de *M*, le parallelogramme *MEOD*, qui devient *MRNS*, sera moindre qu'aucune grandeur donnée. Il est donc évident
* *Art.* 181. selon le Lemme * premier, que les parallelogrammes *PQRM*, *PQNS*, deviennent alors égaux entr'eux; & par conséquent aussi égaux chacun à l'espace curviligne *PQMN*. Donc, &c.

Supposons 2°. Que le petit arc *MN* soit sur une courbe *BMG* dont tous les points approchent de plus en plus de ceux de son diametre *CG*. Il est visible que la démonstration demeure la même que pour le premier cas, en observant simplement que le parallelogramme circonscrit *PQNS* devient inscrit en ce cas-ci.

Supposons 3°. Qu'une ligne courbe telle que *ABG*, soit

composée de plusieurs portions dont les unes, comme *AB*, s'éloignent de plus en plus du diametre *AG*; & les autres au contraire, comme *BG*, s'en approchent de plus en plus. Je dis que les points, comme *B*, qui séparent ces portions, ne peuvent tomber sur les arcs *MN*; car si cela étoit le point *B* seroit plus près du point *M* que n'est le point *N*; ce qui est contre la supposition. Il est donc évident que ce dernier cas est necessairement renfermé dans l'un ou dans l'autre des deux premiers.

COROLLAIRE I.

184. DE-LA il suit que si l'on mene par tout où l'on voudra une ordonnée *CB* parallele à *PM*, & qu'on imagine que la portion de courbe *AB* soit divisée en une multitude infinie d'arcs infiniment petits, tels que *MN*; l'espace *ACB* renfermé par les droites *AC*, *CB*, & par la portion de courbe *AB*, sera égal à la somme de tous les parallelogrammes tels que *PQRM* ou *PQNS*. Il s'ensuit de même que l'espace *MPCB* renfermé par les droites *MP*, *PC*, *CB*, & par la portion de courbe *MB*, sera égal à la somme de tout ce qu'il y aura de ces parallelogrammes dans cet espace; & de même dans toute l'étenduë de la courbe *ABG*.

COROLLAIRE II.

185. S'IL y a une figure quelconque *CMDOC* renfermée entre deux paralleles *CE*, *DF*, & qu'on imagine par tout où l'on voudra entre ces paralleles deux droites *MO*, *NL*, infiniment proches l'une de l'autre, & qui leur soient aussi paralleles; je dis que l'espace *OMNL* qu'elles couperont dans la figure *CMDOC*, sera égal au rectangle d'une d'elles, comme de *MO*, par leur distance *MR* ou *OS*. Car menant la perpendiculaire *AB* sur les paralleles *CE*, *DF*, laquelle rencontre les paralleles *MO*, *NL*, aux points *P*, *Q*; il est clair par le Lemme * que l'espace *PMNQ* est égal au rectangle *PMRQ*, & l'espace *POLQ* au rectangle *POSQ*; & par consequent que l'espace *OMNL* est égal au rectangle *OMRS* ou $OM \times PQ$. FIG. CV. * *Art.* 183.

COROLLAIRE III.

186. IL suit du Corollaire précédent, que s'il y a deux figures quelconques *CMDOC*, *EGFHE* renfermées entre deux paral-

leles *CE*, *DF*, & qui soient telles qu'ayant mené entre ces paralleles par tout où l'on voudra une ligne *MH* parallele aux droites *CE*, *DF*; les parties *MO*, *GH*, de cette ligne comprises dans les figures *CMDOC*, *EGFHE*, soient toujours entr'elles en raison donnée : il suit, dis-je, que ces deux figures (j'entends les espaces qu'elles comprennent) sont aussi entr'elles en raison donnée. Car imaginant une autre parallele *NK* infiniment proche de *MH*, & tirant une perpendiculaire *AB* sur les paralleles *CE*, *DF*, laquelle rencontre les paralleles *MH*, *NK*, aux points *P*, *Q*; il est clair par le Corollaire * précédent que l'espace *OMNL* est égal au rectangle *OM* × *PQ*, & de même que l'espace *GHKI* est égal au rectangle *GH* × *PQ*. Ces deux espaces seront donc entr'eux comme *MO* est à *GH*; & comme cela arrive toujours en quelque endroit qu'on mene la droite *MH*, il s'ensuit que la somme de tous les petits espaces *MNLO*, c'est à dire, l'espace *CMDOC* sera à la somme de tous les petits espaces *GHKI*, c'est à dire, à l'espace *EGFHE*, en la raison donnée.

* Art. 185.

On prouvera de même que la partie *MDO* de la figure *CMDOC*, est encore à la partie correspondante *GFH* de l'autre figure *EGFHE*, en la raison donnée : comme aussi les parties restantes *CMO*, *EGH*.

Il est visible que si la raison donnée est celle d'égalité, c'est à dire, que si les parties *MO*, *GH*, de la droite *MH*, sont toujours égales entr'elles; les espaces *CMDOC*, *EGFHE*, & leurs parties correspondantes *MDO*, *GFH*, & *CMO*, *EGH*, seront égales entr'elles.

LEMME IV.

187. *Si l'on suppose sur une ligne courbe quelconque un arc infiniment petit* MN ; *& qu'on imagine les tangentes* MT, NT, *qui se rencontrent au point* T, *la soûtendante* MN, *& la droite* NS *perpendiculaire sur* MT *prolongée : je dis qu'on peut prendre pour l'arc* MN *sa soûtendante* MN, *ou la somme des deux tangentes* MT, NT, *ou enfin la droite* MS.

FIG. CVI.

Toute ligne courbe est nécessairement ou toujours concave vers un certain endroit, ou composée de plusieurs portions dont les unes étant concaves vers une certaine part, les autres le sont vers le côté opposé. Or les points qui séparent ces portions

tions * ne peuvent point se trouver sur les arcs infiniment petits *MN*: puisqu'ils seroient plus prés du point *M* que n'est le point *N*; ce qui est contre la supposition. On peut donc toujours supposer que l'arc *MN* fait partie d'une courbe ou portion de courbe qui est toujours concave vers un certain côté. * *Art.* 183. *n.* 3.

Maintenant si l'on prend sur la courbe du côté du point *N*, l'arc *MO* d'une grandeur finie, & qu'on tire la soûtendante *OM*, la tangente *OG*, & la parallele *OD* à *NS*: il est clair 1°. A cause du triangle *MDO* rectangle en *D*, que la tangente *MD* est moindre que la soûtendante *MO*, & à plus forte raison moindre que l'arc *MNO*; de sorte que l'arc *MNO* & sa soûtendante *MO* sont plus grands chacun que *MD*, & chacun moindre que la somme des deux tangentes *MG*, *OG*. 2°. A cause de la concavité de l'arc *MNO* vers le même côté, si l'on mene par un point quelconque *N* de l'arc *MO* une tangente *TR*, les points *T*, *R*, où elle rencontre les tangentes *MG*, *OG*, seront situez entre les points *M*, *G*, & *O*, *G*; ainsi l'angle *OGD*, qui est externe au triangle *TGR*, est plus grand que l'angle *RTG* ou *NTS*.

Ceci supposé, si l'on mene les droites *ME*, *MF*, paralleles aux tangentes *OG*, *NT*, & qui rencontrent la droite *DO* aux points *E*, *F*; & qu'on imagine que le point *O* se meuve suivant la courbe vers le point *M*: il est visible que l'angle *OGD*, ou son égal *EMD*, diminuera continuellement jusqu'à ce qu'il s'évanoüisse dans l'instant que le point *O* parvient en *M*; puisqu'alors la tangente *OG* se confond avec la tangente *MD*: d'où il suit que la ligne *ME* diminuë continuellement, jusqu'à ce qu'enfin elle devienne égale à *MD* dans cet instant. Donc lorsque le point *O* est arrivé en *N*, c'est à dire, infiniment près du point *M*, la ligne *ME*, alors en *MF*, ne sera pour lors differente de la tangente *MD*, que d'une grandeur moindre qu'aucune donnée; & par conséquent * les lignes *TN*, *TS*, dont elles expriment le rapport, seront égales entr'elles. Les deux tangentes *MT*, *TN*, prises ensemble, seront donc égales à la droite *MS*, comme aussi à l'arc *MN*, & à la soûtendante *MN*. *Ce qu'il falloit démontrer.* * *Art.* 182.

COROLLAIRE I.

188. PUISQUE l'angle *FMD*, ou ſon égal *NTS*, eſt infiniment petit dans la ſuppoſition que le point *N* ſoit infiniment prés du point *M*, il s'enſuit que dans le triangle *MTN*, l'angle interne *NMT*, qui eſt moindre que l'exterieur *NTS*, ſera auſſi infiniment petit, c'eſt à dire, moindre qu'aucun angle donné; & qu'ainſi on ne pourra mener par le point *M* aucune ligne droite qui tombe dans l'angle *TMN*. D'où l'on voit que ces deux lignes *MT*, *NM*, ſe confondent entr'elles, & qu'ainſi on peut regarder une tangente comme une ligne droite qui paſſe par deux points d'une ligne courbe infiniment proches l'un de l'autre.

COROLLAIRE II.

189. SI l'on imagine qu'une ligne courbe quelconque ſoit diviſée en une mulitude infinie d'arcs infiniment petits tels que *MN*; il eſt clair qu'en prenant au lieu de ces arcs leurs ſoûtendantes, ou verra naître un Polygone d'une infinité de côtés, chacun infiniment petit, que l'on pourra prendre pour la ligne cour-
*Art. 187. be: puiſqu'elle * n'en differera en aucune maniere. De plus les petits côtés de ce Polygone étant prolongés de part & d'autre, ſeront les tangentes de cette courbe; puiſqu'ils paſſent chacun par deux de ſes points infiniment proches l'un de l'autre.

REMARQUE.

190. ON doit faire ici attention que l'idée ou notion qu'on a donnée des tangentes des Sections Coniques, ne convient qu'aux lignes courbes qui ſont toujours concaves dans toute leur éten-
*Art. 26. 61. 124. duë vers le même côté, comme ſont * ces Sections: au lieu que cette derniere notion eſt generale pour toutes ſortes de lignes courbes. Auſſi eſt-ce elle qui ſert de fondement à la méthode des tangentes que j'ai expliquées, dans mon Livre des *Infiniment petits*, & que j'oſe aſſûrer être la plus ſimple & la plus generale qu'on puiſſe ſouhaiter. On en verra un foible échantillon à la fin de ce Livre.

DÉFINITIONS.

1.

Deux ſegmens de lignes courbes quelconques *BAD*, *bad*, ſont appellés *Semblables*; lorſqu'ayant inſcrit dans l'un d'eux une figure rectiligne quelconque *BMNOD*, on peut toujours inſcrire dans l'autre une figure rectiligne ſemblable *bmnod*. Fig. CVII. CVIII. CIX.

2.

Deux Sections Coniques ſont appellées *Semblables*; lorſqu'ayant pris dans l'une d'elles un ſegment quelconque *BAD*; on peut toujours aſſigner dans l'autre un ſegment ſemblable *bad*.

3.

On appelle diametres *Semblables AP*, *ap*, dans differentes Sections Coniques, ceux qui ſont avec leurs ordonnées *PM*, *pm*, les mêmes angles *APM*, *apm*.

COROLLAIRE.

191. PLUS chacun des côtés *BM*, *MN*; &c. *bm*, *mn*, &c. devient petit; plus leur nombre augmente, & plus auſſi les figures rectilignes ſemblables *BMNOD*, *bmnod*, approchent des ſegmens *BAD*, *bad*, auſquels elles ſont inſcrites; de ſorte qu'elles leur deviennent enfin égales * lorſque chacun des côtés eſt infiniment petit, & que leur nombre par conſéquent eſt infini. D'où il ſuit que les ſegmens ſemblables *BAD*, *bad*, ſont entr'eux comme les quarrés de leurs ſoûtendantes *BD*, *bd*, qui ſont des côtés homologues; & les portions des courbes *BAD*, *bad*; comme ces ſoûtendantes. * *Art.* 189.

PROPOSITION I.

Theorême.

192. *SOIENT deux Paraboles* AM, am, *qui ayent deux diametres ſemblables* AL, aL, *ſitués ſur la même droite, en ſorte que leurs ordonnées* PM, pm, *ſoient paralleles entr'elles; & ſoit marqué ſur cette droite au dedans des Paraboles un point fixe* L, *tel que* LA *ſoit à* La, *comme le parametre* AG *du diametre* AL *de la Parabole* AM, *eſt au* Fig. CVII.

parametre ag *du diametre* aL *de la Parabole* am. *Je dis que si l'on mene du point fixe* L *à un point quelconque* M *de la Parabole* AM, *une ligne droite* LM; *elle rencontrera l'autre Parabole* am *en un point* m *tel que* LM. Lm :: LA. La.

Ayant mené l'ordonnée MP, & nommé les données LA, a; La, b; AG, p; & les indéterminées AP, x; PM, y; on aura LA (a). La, (b) :: AG (p). $ag = \frac{bp}{a}$. Or si l'on prend sur le diametre aL de la Parabole am, la partie ap $= \frac{bx}{a}$, & qu'on mene l'ordonnée pm; il est clair * que $\overline{pm}^2$ $= pa \times ag$ ($\frac{bbpx}{aa}$) $= \frac{bbyy}{aa}$ en mettant pour px * sa valeur yy; & qu'ainsi $pm = \frac{by}{a}$. Donc PM (y). pm ($\frac{by}{a}$) :: LP ($a - x$). Lp ($b - \frac{bx}{a}$). Et par conséquent la ligne LM passera par le point m extremité de l'ordonnée pm, c'est à dire, qu'elle coupera la Parabole am en ce point. Donc à cause des triangles semblables LPM, Lpm, on aura LM. Lm :: PM (y). pm ($\frac{by}{a}$) :: LA (a). La (b). *Ce qu'il falloit démontrer.*

* Art. 6. & 20.
* Ibid.

COROLLAIRE I.

193. Si l'on prend dans la Parabole AM un segment quelconque BAD; & qu'ayant mené les droites LB, LD qui rencontrent l'autre Parabole am aux points b, d, on tire la soûtendante bd: je dis que le segment bad de la Parabole am, est semblable au segment BAD de la Parabole AM. Car ayant inscrit dans le segment BAD une figure rectiligne quelconque $BMNOD$, il est clair que si l'on mene les droites LM, LN, LO, qui rencontrent l'autre Parabole aux points m, n, o; les triangles LBM, Lbm; LMN, Lmn; LNO, Lno; LOD, Lod; LBD, Lbd, seront semblables; & qu'ainsi les côtés BM, bm; MN, mn; NO, no; OD, od; BD, bd; seront paralleles, & toûjours en même raison chacun à son correspondant; puisque toutes les droites LB, LM, LN, LO, LD, sont coupées en même raison aux points b, m, n, o, d. D'où l'on voit que les figures rectilignes $BMNOD$, $bmnod$, sont semblables. Or comme il est évident que cette démonstration subsiste toujours, telle que puisse être la figure rectiligne inscrite dans le segment BAD; il s'ensuit que les segmens BAD, bad, * sont semblables; & par conséquent * que les Paraboles AM, am, le sont aussi.

* Def. 1.
* Def. 2.

COROLLAIRE II.

194. DE-LA il eſt évident que ſi l'on mene par le point *L* une double ordonnée *EF* dans la Parabole *AM*, laquelle rencontre l'autre Parabole *am* aux points *e*, *f*; les ſegmens *EAF*, *eaf*; des deux Paraboles *AM*, *am*, ſeront ſemblables entr'eux.

COROLLAIRE III.

195. TOUTES les Paraboles ſont ſemblables entr'elles; car ſi l'on prend ſur deux diametres ſemblables de deux differentes Paraboles, les parties *AL*, *aL*, qui ſoient entr'elles comme les parametres *AG*, *ag*; & ſi l'on conçoit que le diametre *La* ſoit ſitué ſur le diametre *LA*: en ſorte que les points *L*, *L*, tombent l'un ſur l'autre, & que leurs ordonnées *PM*, *pm*, ſoient paralleles entr'elles: il eſt clair qu'ayant mené du point fixe *L* à un point quelconque *M* de la Parabole *AM*, une ligne droite *LM*; elle rencontrera toujours l'autre Parabole *am* en un point *m* tel que *LM*. *Lm* :: *LA*. *La*. Donc * &c. * *Art.* 193.

COROLLAIRE IV.

196. DE-LA il ſuit que ſi l'on prend ſur deux diametres ſemblables de deux differentes Paraboles, les parties *AL*, *aL*, qui ſoient entr'elles comme les parametres de ces diametres, & qu'on tire par les points *L*, *L*, les doubles ordonnées *EF*, *ef*: les ſegmens *EAF*, *eaf*, des deux Paraboles *AM*, *am*, ſeront ſemblables entr'eux.

COROLLAIRE V.

197. SI deux ſegmens *BAD*, *bad*, ſont ſemblables entr'eux, & que l'un d'eux *BAD*, ſoit le ſegment d'une Parabole; je dis que l'autre *bad* ſera le ſegment d'une autre Parabole, & qu'ainſi il n'y a entre toutes les courbes imaginables que des Paraboles qui puiſſent être ſemblables à une Parabole donnée. Car ſi l'on place le petit ſegment *bad* au dedans du grand *BAD*, en ſorte que les ſoûtendantes *bd*, *BD*, ſoient paralleles; & qu'on inſcrive dans l'un & l'autre deux figures rectilignes quelconques ſemblables *BMNOD*, *bmnod*: il eſt clair que les côtés homo-

logues *BM*, *bm*; *MN*, *mn*; &c. de ces deux figures seront paralleles : puisque les angles *DBM*, *dbm*; *BMN*, *bmn*; &c. sont égaux entr'eux. Or menant *LM*, *LN*, *LO*, par le point de concours *L* des deux droites *Bb*, *Dd*, qui joignent les extremités des soûtendantes paralleles *BD*, *bd*, qui sont les deux côtés homologues donnés; ces droites *LM*, *LN*, *LO*, passeront par les points correspondans *m*, *n*, *o*, où elles seront divisées en même raison que *LB* l'est en *b*, ou *LD* en *d*; puisque *BD*. *bd* :: *LB*. *Lb* :: *BM*. *bm* :: *LM*. *Lm* :: *MN*. *Mn* :: *LN*. *Ln* :: *NO*. *no* :: *LO*. *Lo* :: *OD*. *od*.

Maintenant si l'on mene par le point *L* le diametre *LA* de la Parabole *AM*; qu'on le divise en *a*, en la même raison que *LB* l'est en *b*, ou *LD* en *d*; & qu'on décrive * du diametre *aL*, & du parametre *ag* qui soit au parametre *AG* du diametre *AL* de la Parabole *AM*, comme *La* est à *LA*, une Parabole *am* dont les ordonnées *pm* soient paralleles aux ordonnées *PM* de l'autre Parabole : il est évident * qu'elle passera par tous les points *b*, *m*, *n*, *o*, *d*, qui divisent dans la raison donnée de *BD* à *bd* toutes les droites *LB*, *LM*, *LN*, *LO*, *LD*. Or comme ce raisonnement subsiste toujours tel que puisse être le nombre des côtés des figures rectilignes semblables *BMNOD*, *bmnod*, & de telle grandeur qu'ils puissent être; il s'ensuit que la Parabole *am* passe par tout par où le segment *bad* passe, & qu'ainsi ce segment en est une portion. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* Art. 161.
* Art. 192.

PROPOSITION II.

Theorême.

198. Fig. CVIII. CIX. *Soit une Ellipse ou Hyperbole* AM *qui ait pour un de ses premiers diametres la ligne* AH, *& pour parametre de ce diametre la ligne* AG; *& ayant pris sur ce diametre (prolongé dans l'Hyperbole) un point fixe* L, *& divisé en même raison aux points* a, h, *ses parties* LA, LH. *Soit une autre Ellipse ou Hyperbole* am *qui ait pour premier diametre la ligne* ah, *pour parametre de ce diametre la ligne* ag *qui soit à* AG *comme* ah *est* AH, *& dont les ordonnées* pm *soient paralleles aux ordonnées* PM *de l'autre Section* AM. *Je dis que si l'on mene du point fixe* L *à un point*

quelconque M *de la Section* AM, *une ligne droite quelconque* LM; *elle rencontrera l'autre Section* am, *en un point* m *tel que* LM. Lm :: LA. La: *c'est à dire que toutes les droites tirées du point fixe* L *aux points de la Section* AM, *sont divisées en même raison par la Section* am.

Il faut prouver que LM. Lm :: LA. La.

Ayant mené l'ordonnée *MP*, & nommé les données *LA*, *a*; *La*, *b*; *AH*, *2t*; & les indéterminées *AP*, *x*; *PM*, *y*; on aura $LA\ (a).\ La\ (b) :: LH.\ Lb :: LH \pm LA$ ou $AH\ (2t).\ Lb \pm La$ ou $ab = \frac{2bt}{a}$. Or si l'on prend sur le diametre *ab* de la Section *am* la partie $ap = \frac{bx}{a}$, & qu'on mene l'ordonnée *pm*; il est clair * que $AP \times PH\ (2tx \mp xx).\ \overline{PM}^2\ (yy) :: AH.\ AG :: ab.\ ag :: ap \times pb\ (\frac{2bbtx \mp bbxx}{aa}).\ \overline{pm}^2 = \frac{bbyy}{aa}$, & qu'ainsi $pm = \frac{by}{a}$. Donc $PM\ (y).\ pm\ (\frac{by}{a}) :: LP\ (a - x).\ Lp\ (b - \frac{bx}{a})$. Et par consequent la ligne *LM* passera par le point *m* extremité de l'ordonnée *pm*, c'est à dire qu'elle coupera la Section *am* en ce point. Donc à cause des triangles semblables *LPM*, *Lpm*, on aura $LM.\ Lm :: PM\ (y).\ pm\ (\frac{by}{a} :: LA\ (a).\ La\ (b)$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* *Art.* 42. 55. 81. & 118.

COROLLAIRE I.

199. Si l'on prend dans la Section *AM* un segment quelconque *BAD*, & qu'ayant mené les droites *LB*, *LD*, qui rencontrent l'autre Section *am* aux points *b*, *d*, on tire la soûtendante *bd*: je dis que le segment *bad* de la Section *am* est semblable au segment *BAD* de la Section *AM*; & partant que si l'on mene par le point *L* une double ordonnée *EF* dans la Section *AM*, laquelle rencontre l'autre Section aux points *e*, *f*; les segmens *EAF*, *eaf*, des deux Ellipses ou des deux Hyperboles *AM*, *am*, seront semblables entr'eux. Cela se prouve de même que pour la Parabole dans les articles 193. & 194.

COROLLAIRE II.

200. TOUTES les Ellipses ou Hyperboles *AM*, *am*, qui ont deux diametres semblables *AH*, *ab*, en même raison avec leurs parametres *AG*, *ag*, sont semblables entr'elles. Car si l'on prend les parties *AL*, *aL*, qui soient entr'elles comme les diametres *AH*, *ab*, & que l'on conçoive que le diametre *ab* soit situé sur le diametre *AH*, en sorte que les points *L*, *L*,

tombent l'un ſur l'autre, & que les ordonnées *pm*, *PM*, ſoient paralleles entr'elles : il eſt clair qu'ayant mené du point fixe *L* à un point quelconque *M* de la Section *AM* une ligne droite *LM*, elle rencontrera toujours l'autre Section *am*, en
* Art. 199. un point *m* tel que *LM*. *Lm* :: *LA*. *La*. Donc * &c.

COROLLAIRE III.

201. De-la il eſt évident que s'il y a deux Ellipſes ou deux Hyperboles *AM*, *am*, dont deux diametres ſemblables *AH*, *ah*, ſoient en même raiſon avec leurs parametres *AG*, *ag*; & qu'ayant pris les parties *AL*, *aL*, qui ſoient entr'elles comme les diametres *AH*, *ah*, on tire par les points *L*, *L*, les doubles ordonnées *EF*, *ef*: il eſt évident, dis je, que les ſegmens *EAF*, *eaf*, des deux Sections *AM*, *am*, ſont ſemblables entr'eux.

COROLLAIRE IV.

202. Si deux ſegmens *BAD*, *bad*, ſont ſemblables entr'eux; & que l'un d'eux ſoit le ſegment d'une Ellipſe ou d'une Hyperbole *AM*, qui ait pour un de ſes diametres quelconques la ligne *AH* dont le parametre eſt *AG*; Je dis que l'autre *bad* ſera le ſegment d'une autre Ellipſe ou d'une autre Hyperbole *am*, qui aura pour l'un de ſes diametres ſemblables à *AH*, la ligne *ah* qui ſera en même raiſon avec ſon parametre *ag*, que *AH* avec le ſien *AG*. Car ayant placé le ſegment *bad*, au dedans du ſegment *BAD*, en ſorte que la ſoûtendante *bd* ſoit parallele à la ſoûtendante *BD*, & que les lignes *Bb*, *Dd*, concourent en un point *L* du diametre *AH* (ce qui eſt toujours poſſible), & inſcrit dans l'un & l'autre deux figures rectilignes quelconques ſemblables; on prouvera comme dans la Parabole article 197. que les droites *LM*, *LN*, *LO*, paſſeront par les points correſpondans *m*, *n*, *o*, où elles ſeront diviſées en même raiſon que *LB* l'eſt en *b*, ou *LD* en *d*.

Maintenant ſi l'on diviſe les parties *LA*, *LH*, du diametre *AH* aux points *a*, *h*, en même raiſon que *LB* l'eſt en *b*; &
* Art. 161. qu'on décrive * du diametre *ah* & du parametre *ag* qui ſoit au parametre *AG* du diametre *AH*, comme *La* eſt à *LA*, ou *ah* à *AH*, une Ellipſe ou une Hyperbole *am*, dont les ordonnées *pm* ſoient paralleles aux ordonnées *PM* de l'autre Ellipſe ou

ou Hyperbole *AM* : il eſt évident * qu'elle paſſera par tous les points *b*, *m*, *n*, *o*, *d*, qui diviſent dans la raiſon donnée de *bd* à *BD* toutes les droites *LB*, *LM*, *LN*, *LO*, *LD*. Or comme ce raiſonnement ſubſiſte toujours tel que puiſſe être le nombre des côtés des figures rectilignes ſemblables *BMNOD*, *bmnod*, & de telle grandeur qu'ils puiſſent être ; il s'enſuit que l'Ellipſe ou l'Hyperbole *am* paſſe par tous les mêmes points par leſquels paſſe le ſegment *bd*, & qu'ainſi ce ſegment en eſt une portion. *Ce qu'il falloit démontrer.* * *Art.* 198.

COROLLAIRE V.

203. IL eſt donc évident que ſi deux Ellipſes ou deux Hyperboles *AM*, *am*, ſont ſemblables, & qu'on prenne dans la Section *AM* un de ſes diametres quelconques *AH* ; il y aura toujours dans l'autre Section *am* un diametre *ab* ſemblable à *AH*, qui aura avec ſon parametre *ag* la même raiſon que *AH* avec le ſien *AG* : & qu'ainſi les diametres ſemblables *AH*, *ab*, ſeront en même raiſon avec leurs diametres conjugués. Or comme dans une Ellipſe ou Hyperbole il ne peut y avoir * que deux differens diametres conjugués qui faſſent entr'eux les mêmes angles, & que ces diametres ne different que par leur poſition, leur grandeur demeurant la même ; il s'enſuit que dans les Ellipſes ou les Hyperboles ſemblables tous les diametres conjugués qui feront les mêmes angles, feront entr'eux en même raiſon ; obſervant de prendre pour les antécédens de ces deux raiſons les plus grands de ces deux diametres conjugués, & pour conſéquens les moindres. * *Art.* 66. & 128.

PROPOSITION III.

Theorême.

204. *SI l'on mene dans une Section Conique deux paralleles quelconques* BD, EF, *terminées par la Section ; & qu'on joigne leurs extremités par deux droites* BE, DF ; *je dis que les ſegmens* BMEB, DMFD, *compris par des portions de la Section, & par les droites qui joignent les extremités des paralleles, ſeront égaux entr'eux.* FIG. CX. CXI.

Car ayant prolongé les ſoûtendantes *BE*, *DF*, juſqu'à ce qu'elles ſe rencontrent en un point *G*, & ayant mené par ce

point & par le point de milieu *H* de la ligne *BD*, la droite *GH*; il eſt clair qu'elle diviſera par le milieu en *K* la parallele *EF* à *BD*, comme auſſi par le milieu en *P* un autre parallele quelconque *OO* à la même ligne *BD*. Donc la ligne *HK* ſera un diametre * qui aura pour ordonnées de part & d'autre les paralleles *BD*, *EF*; & partant ſi l'on mene par un de ſes points quelconques *P* une parallele à ces lignes, elle rencontrera * la Section en deux points *M*, *M*, également éloignés du point *P*; d'où l'on voit que les parties *MO*, *OM*, de la même parallele *MM* à *BD*, compriſes dans les ſegmens *BMEB*, *DMFD*, ſont toujours égales entr'elles, en quelque endroit que puiſſe tomber cette parallele entre les lignes *BD*, *EF*. Il eſt donc évident * que ces deux ſegmens ſeront égaux entr'eux.

* Art. 146.
* Art. 144.
* Art. 186.

Si les ſoûtendantes *BE*, *DF*, étoient paralleles entr'elles, il faudroit mener par le point de milieu *H* de la ligne *BD* une droite *HK* parallele à ces ſoûtendantes, & la démonſtration demeureroit toujours la même.

COROLLAIRE I.

205. PUISQUE *PM* eſt toujours égale à *PM*; il s'enſuit 1°. Que les Trapeſes Coniques *KHBE*, *KHDF*, ſont égaux entr'eux. 2°. (Lorſque la ligne *BD* au lieu de rencontrer la Section en deux points la touche en un point *A*) que les Trilignes Coniques *AKE*, *AKF*, ſont égaux; & qu'ainſi les ſegmens *AEMA*, *AFMA*, le ſont auſſi; puiſque le triangle *AEF* eſt diviſé en deux parties égales par le diametre *AK* qui paſſe par le milieu de *EF*.

FIG. CX.

COROLLAIRE II.

206. SI la Section étant une Parabole, une Ellipſe, ou une Hyperbole, l'on mene par les extremités des paralleles *BD*, *EF*, les droites *BF*, *DE*, qui s'entrecoupent entre ces paralleles; les ſegmens *BFDAB*, *DEBAD*, ſeront égaux entr'eux. Car les triangles *BFD*, *BED*, qui ſont entre les mêmes paralleles *BD*, *EF*, & qui ont la même baſe *BD*, ſont égaux entr'eux; & partant ſi l'on ajoute d'une part le ſegment *DMFD* plus le ſegment *BADB*, & de l'autre *BMEB* égal au ſegment *DMFD*, plus auſſi le même ſegment *BADB*; les touts *BFDAB*, *DEBAD*, ſeront égaux entr'eux.

FIG. CX.

COROLLAIRE III.

207. DE-LA on voit comment on peut couper par un point donné *D* sur une Section Conique, deux segmens *DGED*, *DFBD*, égaux chacun à un segment donné *BEDB*. Car ayant tiré les droites *BD*, *DE*, & mené *BG* parallele à *DE*, & *EF* parallele à *BD*, lesquelles rencontrent la Section aux points *G*, *F*; il est clair * en joignant la droite *DF*, que le segment *DFBD* est égal au segment *BEDB*, à cause des paralleles *DB*, *EF*; & de même en joignant *DG*, que le segment *DGED* est égal au segment *BEDB*, à cause des paralleles *BG*, *DE*. Fig. CXII.

* Art. 206.

Si le point donné tomboit sur l'une des extremités du segment donné que je suppose être à present *DGED*, il faudroit mener par l'autre extremité *G*, une parallele *GF* à la tangente qui passe par le point *D*; & tirant par le point *F* où cette parallele rencontre la Section, & par le point donné *D*, la soûtendante *DF*, il est clair que le segment *DFBD* sera égal au segment donné *DGED*.

Il est visible qu'il ne peut y avoir dans ce dernier cas que le seul segment *DFBD* qui soit égal au segment donné *DGED*; puisque tout autre segment qui aura pour l'une de ses extremités le point donné *D*, sera plus grand ou moindre que le segment *DFBD*, selon que son autre extremité sera plus proche ou plus éloignée du point *D* que n'est le point *F*. D'où il suit que si deux segmens *DGED*, *DFBD*, qui ont une extremité commune *D*, sont égaux entr'eux; & que si l'on mene par le point *D* une parallele à la droite *GF* qui joint leurs autres extremités, elle sera tangente en *D*.

COROLLAIRE IV.

208. ON tire du Corollaire précédent une maniere toute nouvelle & fort aisée de mener une tangente par un point donné sur une Section Conique donnée.

Car ayant tiré par ce point deux droites quelconques *DB*, *DE*, qui rencontrent la Section aux points *B*, *E*, on menera par le point *B* une parallele *BG* à *DE*, & par le point *E* une parallele *EF* à *BD*, lesquelles rencontrent la Section aux points *G*, *F*, que l'on joindra par une ligne droite *GF*, à la-

quelle on tirera par le point *D* une parallele qui sera la tangente cherchée ; puisque les segmens *DGED*, *DFBD*, étant égaux chacun au même segment *BEDB*, le feront entr'eux.

PROPOSITION IV.

Theorême.

209 *S'IL y a dans une Ellipse, dans une Hyperbole, ou dans les*
FIG. CXIII. *Hyperboles opposées deux lignes droites* BD, EF, *paralleles*
CXIV. & *entr'elles & terminées par la Section; & qu'on tire du centre*
CXV. C *les demi-diametres* CB, CE, CD, CF, *les Secteurs Elliptiques ou Hyperboliques* CBE, CDF, *seront égaux entr'eux.*

Car menant par les points de milieu *H*, *K*, des droites *BD*, *EF*, le diametre *CK*, les triangles *CHB*, *CHD*, & *CKE*, *CKF*, seront égaux entr'eux; puisqu'ils ont le même sommet *C*, & que leurs bases *HB*, *HD*, & *KE*, *KF*, sont égales. Par conséquent (*fig.* 114.) $KHBE + CBE = CKE - CHB = CKF - CHD = KHDF + CDF$; & (*fig.* 113.115) $KHBE - CBE = \pm CHB \mp CKE = \pm CHD \mp CKF = KHDF - CDF$. Donc puisque les Trapeses Coniques *KHBE*,
* *Art.* 205. *KHDF*, sont * égaux, il s'ensuit que les Secteurs Elliptiques ou Hyperboliques *CBE*, *CDF*, le seront aussi.

COROLLAIRE I.

210. SI la Section est une Ellipse, ou une Hyperbole; & que la
FIG. CXIII. ligne *BD* parallele à *EF*, devienne tangente en *A*; il est clair
CXIV. que les Secteurs *CAE*, *CAF*, seront égaux entr'eux. Car prolongeant le demi diametre *CA* jusqu'à ce qu'il rencontre la ligne *EF* au point *K*, cette ligne sera coupée en deux également en ce point ; & par conséquent les triangles *CKE*, *CKF*, seront égaux. Or les trilignes Coniques *AKE*, *AKF*, le sont
* *Art.* 205. * aussi. Donc &c.

COROLLAIRE II.

211. DE-LA on voit que pour diviser en deux parties égales un Secteur Elliptique ou Hyperbolique quelconque *CEF*; il n'y a qu'à mener le demi-diametre *CA* qui divise par le milieu en *K* la soûtendante *EF* de ce Secteur. Ce qui donne encore les

Secteurs *CBE*, *CDF*, égaux entr'eux, en supposant *BD* parallele à *EF*. Car ayant de cette maniére les Secteurs *CAE*, *CAF*, & *CAB*, *CAD*, égaux entr'eux, les Secteurs *CBE*, *CDF*, qui en sont les differences, doivent aussi être égaux entr'eux.

PROPOSITION V.

Theorême.

212. *Soit un demi-cercle* ADH, *qui ait pour diametre le premier ou grand axe* AH *d'une demie-Ellipse* ABH; *soit menée par un point quelconque* P *de l'axe* AH, *une perpendiculaire à cet axe, qui rencontre l'Ellipse au point* M, *& le cercle au point* N; *par où & par le centre* C *soient tirées les droites* CM, CN. *Je dis que le Secteur Elliptique* CAM *est au Secteur circulaire* CAN, *comme la moitié* CB *du petit axe de l'Ellipse, est à la moitié* CA *ou* CD *du grand.* Fig. CXVI.

Car par la proprieté * de l'Ellipse $\overline{PM}^2 . \overline{CB}^2 :: AP \times PH . AC \times CH$ ou $\overline{CA}^2$, & par la proprieté du cercle $\overline{PN}^2 . \overline{CD}^2 :: AP \times PH . AC \times CH$ ou $\overline{CA}^2$. Donc $\overline{PM}^2 . \overline{CB}^2 :: \overline{PN}^2 . \overline{CD}^2$. ou $\overline{PM}^2 . \overline{PN}^2 :: \overline{CB}^2 . \overline{CD}^2$. Et en tirant les racines quarrées, $PM . PN :: CB . CD$ ou CA. Or comme cela arrive toujours en quelque endroit que tombe la perpendiculaire *PMN*, il s'ensuit * que l'espace Elliptique entier *ABHA* est au demi cercle *ADHA*, & la portion *APM* de cet espace à la portion *APN* du demi cercle, comme *CB* est à *CD* ou à *CA*. Mais le triangle rectangle *CPM* est au triangle rectangle *CPN* qui a la même hauteur, comme la base *PM* est à la base *PN*, c'est à dire, comme *CB* est à *CD* ou à *CA*; & par conséquent l'espace Elliptique *APM* plus ou moins le triangle *CPM* (plus lorsque *AP* est moindre que *AC*, & moins lorsqu'elle est plus grande) c'est à dire, le Secteur Elliptique *CAM* sera à l'espace circulaire *APN* plus ou moins le triangle *CPN*, c'est à dire, au Secteur circulaire *CAN*, comme *CB* est à *CD* ou à *CA*. *Ce qu'il falloit démontrer.* * Art. 41. & 55. * Art. 186.

Corollaire I.

213. Comme le Secteur de cercle *CAN* est égal au rectangle de l'arc *AN* par la moitié du rayon *CA* ou *CD*; il s'ensuit que le

Secteur Elliptique *CAM* est aussi égal au rectangle de ce même arc *AN* par la moitié de *CB*.

COROLLAIRE II.

214. Si l'on mene par un point quelconque G du grand axe *AH* autre que le point *P*, une perpendiculaire à cet axe, qui rencontre l'Ellipse au point *E*, & le cercle au point *F*; je dis que les Secteurs Elliptiques *ACE*, *ACM*, sont entr'eux, comme les Secteurs circulaires *ACF*, *ACN*. Car *ACM*. *ACN* :: *CB*. *CD*. Et de même *ACE*. *ACF* :: *CB*. *CD*. Et partant *ACM*. *ACN* :: *ACE*. *ACF*. Et *ACM*. *ACE* :: *ACN*. *ACF*. D'où l'on voit que pour trouver un Secteur Elliptique *ACM*, qui soit au Secteur Elliptique *ACE* en raison donnée; il n'est question que de trouver un Secteur circulaire *ACN* qui soit en raison donnée au Secteur *ACF*, ou ce qui est la même chose, de diviser en raison donnée l'arc *ANF* ou l'angle *ACF*.

PROPOSITION VI.

Theorême.

215. *S'il y a deux demi Hyperboles* AM, AN, *ou* BM, DN, *qui ayent pour centres le même point* C, *pour un de leurs demi diametres la même droite* CA, *& pour les deux demi-diametres conjugués au demi-diametre* CA, *deux droites quelconques* CB, CD, *situées sur la même ligne ; & qu'on mene par un point quelconque* P *du demi-diametre* CA (*prolongé s'il est necessaire*) *une droite parallele à* CD, *laquelle rencontre les Hyperboles aux points* M, N; *par lesquels & par le centre* C, *soient tirées les droites* CM, CN : *je dis que les Secteurs Hyperboliques* CAM, CAN, *ou* CBM, CDN, *seront entr'eux comme les demi-diametres conjugués* CB. CD.

Fig. CXVII. CXVIII.

On aura par la proprieté * des deux Hyperboles *AM*, *AN*, ou *BM*, *DN*, ces deux proportions $\overline{PM}^2 . \overline{CB}^2 :: \overline{CP}^2 \mp \overline{CA}^2 . \overline{CA}^2 :: \overline{PN}^2 . \overline{CD}^2$. Et par conséquent $\overline{PM}^2 . \overline{PN}^2 :: \overline{CB}^2 . \overline{CD}^2$. Et en prenant les racines quarrées, *PM*. *PN* :: *CB*. *CD*. Or comme cela arrive toujours en quelque endroit

* Art. 81. & 118.

que tombe la parallele *PMN*, il s'ensuit * que les espaces * *Art. 86.*
Hyperboliques *APM*, *APN*, ou *CPMB*, *CPND*, sont entr'eux comme *CB* est à *CD*. Mais les triangles *CPM*, *CPN*, sont entr'eux, comme leurs bases *PM*, *PN*, (puisqu'ils sont situées entre les mêmes paralleles *CD*, *PN*), ou comme les demi diametres conjugués *CB*, *CD*. Et par conséquent (*fig.* 117.) *CB* . *CD* :: *CPM* — *APM* . *CPN* — *APN* :: *CAM*. *CAN*. Ou bien (*fig* 118.) *CB* . *CD* :: *CPMB* — *CPM*. *CPND* — *CPN* :: *CBM*. *CDN*. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

216. Si les deux demi diametres conjugués *CA*, *CD*, sont égaux entr'eux, l'Hyperbole *AN* ou *DN* sera équilatere. Et si l'on avoit trouvé le moyen de quarrer les Secteurs Hyperboliques *CAN*, ou *CDN*, on auroit aussi la quadrature des Secteurs *CAM*, ou *CBM*, qui ont pour bases des portions *AM*, ou *BM* d'une autre Hyperbole, dont le demi-diametre conjugué *CB* peut être pris de telle grandeur qu'on veut; puisque le rapport des Secteurs Hyperboliques *CAM*, *CAN*, ou *CDN*, *CBM*, étant exprimé par les droites *CD*, *CB*, est donné. D'où l'on voit que si l'on avoit la quadrature de l'Hyperbole équilatére, on auroit aussi celle de toutes les autres Hyperboles: de même qu'ayant * la quadrature du Cercle, * *Art.* 212.
on auroit celle de toutes les Ellipses.

PROPOSITION VII.

Theorême.

217. *Si l'on prend sur une asymptote* CA *d'une Hyperbole* EBDF, Fig. CXIX.
deux parties CK, CL, *qui soient entr'elles en même raison que deux autres parties quelconques* CG, CH, *de la même asymptote; & qu'ayant mené les paralleles* GF, HD, KB, LE, *à l'autre asymptote* CP, *lesquelles rencontrent l'Hyperbole aux points* F, D, B, E, *on tire les demi-diametres* CF, CD, CB, CE: *je dis que les deux Secteurs Hyperboliques* CBE, CDF, *seront égaux entr'eux.*

Ayant mené les deux droites *BD*, *EF*, qui rencontrent les asymptotes aux points *M*, *O*, *N*, *P*; les paralleles *KB*, *HD*, donneront cette proportion, *MB*. *MK* :: *DO*. *CH*. Les

paralleles LE, GF, donneront auſſi cette autre proportion,
*Art. 95. $NE . NL :: FP . CG$. Et partant puiſque * $MB = DO$, & $NE = FP$, il s'enſuit que $MK = CH$, & $NL = CG$. Or par la ſuppoſition CG ou $LN . CH$ ou $KM :: CK . CL ::$
*Art. 100. * $IE . KB$. Et partant $LN . LE :: KM . KB$. Donc les lignes NE, MB, c'eſt à dire, les deux droites EF, BD, dont
*Art. 209. elles ſont parties, ſéront paralleles entr'elles. Donc * les Secteurs Hyperboliques CBE, CDF, ſont égaux entr'eux. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

218. Si les parties CK, CL, de l'aſymptote CN, ſont en même raiſon que deux parties quelconques CS, CT de l'autre aſymptote CP; & qu'on mene les paralleles KB, LE, à l'aſymptote CP, & les paralleles SD, TF, à l'autre aſymptote CN; il eſt clair que les Secteurs Hyperboliques CDF, CBE, ſeront auſſi égaux entr'eux. Car ayant mené les paralleles
*Art. 100. FG, DH, à l'aſymptote CP, on aura * $CG . CH :: HD$ ou
*Hyp. $CS . GF$ ou CT * $:: CK . CL$. Donc &c.

COROLLAIRE II.

219. Si l'on prend ſur la même aſymptote la partie CK troiſiéme proportionnelle à deux parties quelconques CG, CH; on prouvera par un raiſonnement ſemblable à celui du Theorême que la ligne BF eſt parallele à la tangente qui paſſe par le point D;
*Art. 210. & qu'ainſi * les Secteurs Hyperboliques CFD, CDB, ſont égaux entr'eux. D'où il ſuit que ſi l'on prend ſur une aſymptote autant de parties qu'on voudra CG, CH, CK, CL, &c. en progreſſion geometrique continuë, d'où partent les paralleles GF, HD, KB, LE, &c. à l'autre aſymptote, les Secteurs Hyperboliques CFD, CDB, CBE, &c. ſeront tous égaux entr'eux.

COROLLAIRE III.

220. DE-LA on voit que ſi CH eſt la premiere de deux moyennes geometriquement proportionnelles entre les extrêmes CG, CL; & qu'on tire les droites GF, HD, LE, paralleles à l'autre aſymptote; le Secteur CDF, ſera au Secteur CFE, comme 1 eſt

eſt à 3. De même, ſi *CH* eſt la premiere de trois moyennes proportionnelles entre *CG*, *CL*; le Secteur *CDF* ſera au Secteur *CFE*, comme 1 eſt à 4. Et en général, ſi la lettre *m* marque un nombre entier quelconque, & que *GH* ſoit la premiere d'autant de moyennes proportionnelles entre les extrêmes *CG*, *CL*, que le nombre $m - 1$ contient d'unités; le Secteur *CDF*, ſera au Secteur *CFE*, comme 1 eſt au nombre *m*.

REMARQUE.

221. ON peut ici donner une idée fort exacte de ce qu'on appelle *Logarithmes* dans l'Arithmetique, & de l'extrême facilité qu'ils apportent au calcul, lorſqu'il s'agit d'operer ſur de fort grands nombres. Voici comment :

Si l'on ſuppoſe que *CG*, exprime l'unité, & que *CL* étant décuple de *CG*, c'eſt à dire, 10, le Secteur Hyperbolique *CFE*, ſoit diviſé en 10000000000 parties égales. Et ſi l'on compoſe une table diviſée en deux colomnes, dont la premiere renferme de ſuite tous les nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. & l'autre des nombres artificiels, placés vis-à-vis, & qui ſoient tels que *CH*, exprimant un nombre quelconque naturel, le nombre artificiel placé vis-à-vis, exprime le nombre des parties que le Secteur Hyperbolique *CDF* contient par rapport au nombre des parties que contient le Secteur *CFE* : les nombres artificiels ſeront appellés les *Logarithmes* des nombres naturels auſquels ils répondent. Cela poſé,

1°. Si l'on propoſe de multiplier deux nombres naturels quelconques *CH*, *CK*, l'un par l'autre, il n'y aura qu'à prendre dans la table leurs Logarithmes qui expriment les Secteurs *CFD*, *CFB*, & ajoutant enſemble ces deux Logarithmes, on aura le Logarithme qui exprime le Secteur *CFE*, vis-à-vis duquel ſera placé le nombre naturel *CL* produit de la multiplication des deux nombres *CH*, *CK*.

2°. Si l'on propoſe de diviſer le nombre *CL* par le nombre *CK*, il n'y aura qu'à retrancher le Logarithme *CFB* du Diviſeur *CK*, du Logarithme *CFE* du nombre à diviſer *CL*, pour avoir le Logarithme *CBE* ou *CFD* du quotient *CH*.

3°. Si l'on propoſe d'extraire une racine quelconque du nombre *CL*, par exemple la cubique, il n'y aura qu'à diviſer ſon Logarithme *CFE* en trois parties égales, pour avoir le Loga-

rithme *CFD* vis-à-vis duquel est placé le nombre *CH*, qui est la racine cubique cherchée.

Tout cela est une suite de ce que les Secteurs Hyperboliques *CFD*, *CBE*, sont égaux entr'eux, lorsque $CG . CH :: CK . CL$. Et que les Secteurs *CFD*, *CDB*, *CBE*, &c. sont aussi égaux entr'eux, lorsque $CG . CH :: CH . CK :: CK . CL ::$ &c. Il est donc évident que par le moyen de cette table, on pourra abreger extrêmement les operations de l'Arithmethique, lorsqu'il s'agit d'operer sur de grands nombres, comme dans les calculs Astronomiques.

Comme l'on n'a pû jusqu'à present trouver en nombres exacts, le rapport des Secteurs Hyperboliques *CFD*, *CFB*, &c. au Secteur *CFE*, on s'est contenté d'exprimer ce rapport en nombres fort approchans; & par le moyen de ces nombres qu'on appelle *Artificiels*, & des nombres naturels qu'on a placés vis-à-vis, on a composé la Table des Logarithmes qui a les proprietés qu'on vient d'expliquer. Or dans la supposition que le Secteur *CFE* Logarithme de *CL* (10) contient 10000000000 parties égales, on trouvera que le parallelogramme *CGFT* contient plus de 4342944818 de ces parties, & moins de 4342944819. D'où l'on voit qu'un Secteur Hyperbolique quelconque *CBF*, est au parallelogramme *CGFT* à peu près comme le Logarithme du nombre *CK* trouvé dans la Table, est au nombre 4342944819, & cela en prenant les Logarithmes de dix caracteres outre le caractéristique.

PROPOSITION VIII.

Theorême.

222. *S'IL y a sur chaque asymptote deux parties* CG, CL, *&*
FIG. CXX. CR, CS, *qui soient telles que* $\sqrt[m]{CG} . \sqrt[m]{CL} :: \sqrt[n]{CR} . \sqrt[n]{CS}$; *& qu'on tire les droites* GF, LE, RT, SV, *paralleles aux asymptotes : je dis que le Secteur* CFE, *sera au Secteur* CTV, *comme* m *est à* n. *Les lettres* m *&* n *marquent des nombres entiers quelconques.*

Car si l'on fait $\sqrt[m]{CG} . \sqrt[m]{CL} :: CG . CH$. Et $\sqrt[n]{CR} . \sqrt[n]{CS} :: CR . CQ$. Et qu'on tire les droites *HD*, *QN*, paralleles aux

asymptotes ; il est clair que les Secteurs Hyperboliques *CFD*, *CTN*, seront égaux * entr'eux, puisque * *CG*. *CH* :: *CR*. *CQ*. Or selon la nature des Progressions geometriques, la ligne *CH* sera la premiére d'autant de moyennes proportionnelles entre *CG* & *CL* que le nombre $m - i$ contient d'unités, & de même la ligne *CQ* sera la premiére d'autant de moyennes proportionnelles entre *CR* & *CS* que le nombre $n - i$ contient d'unités. Donc * *CFE*. *CFD* :: m. i. Et *CTN* ou *CFD*. *CTV* :: i. n. Et par conséquent le Secteur *CFE* est au Secteur *CTV* en raison composée de m à i, & de i à n, c'est à dire, comme le nombre m est au nombre n. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* Art. 217.
* Hyp.
* Art. 219.

C O R O L L A I R E.

223. DE-LA on voit qu'un Secteur Hyperbolique *CFE* étant donné avec un point quelconque *T* de l'Hyperbole, il ne faut pour trouver un autre point *V* de la même Hyperbole, tel que le Secteur *CFE* soit au Secteur *CTV*, comme m est à n, que prendre *CS* en sorte que $\sqrt[m]{CG} . \sqrt[m]{CL} :: \sqrt[n]{CR} . \sqrt[n]{CS}$, ou (ce qui revient au même) $\sqrt[m]{CG^{n}} . \sqrt[m]{CL^{n}} :: CR . CS$. C'est à dire, qu'il faut prendre $CS = CR \times \sqrt[m]{\frac{CL^{n}}{CG^{n}}}$.

PROPOSITION IX.

Theorême.

224. *S'Il'on mene par les extremités* B, F, *d'un Secteur Hyperbolique quelconque* CBF, *les droites* BK, FG, *paralles à une asymptote* CS, *& terminées par l'autre* CL ; *je dis que le Secteur Hyperbolique* CBF *est égal à l'espace hyperbolique* BKGF *compris entre les paralleles* BK, FG, *à une asymptote* CS, *la partie* GK *de l'autre asymptote* CL, *& la portion* BF *de l'Hyperbole.* FIG. CXXI.

Car si l'on retranche des triangles égaux * *CKB*, *CGF*, le même triangle *CGA* (le point *A* est le point d'interséction des deux droites *FG*, *CB*) & qu'on ajoute aux deux restes *BKGA*, *CAF*, le même espace hyperbolique *BAF*, on formera d'une part l'espace *BKGF*, & de l'autre le Secteur *CBF* qui seront égaux entr'eux. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* Art. 99.

COROLLAIRE I.

225. Si l'on eut mené les lignes *BQ*, *FO*, paralleles à l'asymptote *CL*, & terminées par l'asymptote *CS*, on auroit prouvé de même que le Secteur Hyperbolique *CBF* est égal à l'espace hyperbolique *BQOF*; d'où l'on voit que les espaces ou Trapeses hyperboliques *BKGF*, *BQOF*, sont égaux entr'eux.

COROLLAIRE II.

226. De là il est évident que tout ce qu'on vient de démontrer dans les articles 217, 218, 219, 220, 221, 222, & 223, des Secteurs Hyperboliques, se doit aussi entendre de ces sortes de Trapeses; puisqu'ils leurs sont égaux.

PROPOSITION X.

Theorême.

227. *Soient deux differentes Hyperboles* BMF, HND, *qui* FIG. CXXII. *ayent les mêmes asymptotes* CL, CS, *& soient menées par deux points quelconques* G, K, *d'une asymptote deux paralleles* GDF, KHB, *à l'autre. Je dis que l'espace hyperbolique* HKGD *est à l'espace hyperbolique* BKGF, *comme la puissance de l'Hyperbole* HND, *est à la puissance de l'Hyperbole* BMF.

Car ayant mené par un point quelconque *P* de la partie *GK*, une parallele aux deux droites *GD*, *KH*, laquelle rencontre l'Hyperbole *BMF* au point *M*, & l'Hyperbole *HND* au point *N*; & nommé la puissance de l'Hyperbole *HND*, *aa*; celle de l'Hyperbole *BMF*, *bb*; & l'indéterminée *CP*, *Art. 101. x; on aura * $PN = \frac{aa}{x}$, & $PM = \frac{bb}{x}$; & partant $PN . PM :: aa . bb$. Or comme cela arrive toujours en quelque en-
*Art. 186. droit de la partie *GK* que tombe le point *P*; il s'ensuit * que l'espace hyperbolique *HKGD*. *BKGF* :: *aa*. *bb*. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

228. Lorsque les puissances des Hyperboles *HND*, *BMF*, sont entr'elles comme le nombre *m* est au nombre *n*; on pour-

ra toujours trouver dans l'Hyperbole *HND* un Trapese hyperbolique *RSVT* égal à un Trapese hyperbolique *GKBF* de l'autre *BMF*, les droites *CG*, *CK*, *CR*, étant données. Car il est clair * que le Trapese *GKDH* est au Trapese *GKBF*, *Art.222. & 225. comme *m* est à *n*; & qu'ainsi toute la difficulté se réduit à trouver dans la même Hyperbole *HND*, le Trapese *RSVT*, qui soit au Trapese *GKHD*, comme le nombre *n* est au nombre *m*: & c'est ce qui se fera * en prenant *CS*, telle que *Art.223. & 226. $\sqrt[m-n]{CG} . \sqrt[m-n]{CK} :: CR . CS$.

DE'FINITIONS.

4.

Soit une ligne droite indéfinie *AC*, qui ait pour origine le FIG. CXXIII. point fixe *A*; & soit une ligne courbe *AMB* telle qu'ayant mené d'un de ses points quelconques *M* une droite *MP* qui fasse avec *AC* un angle donné *APM*, & ayant nommé les indéterminées *AP*; *x*; *PM*, *y*; on ait toujours $ax = yy$ (la lettre *a* marque une ligne donnée): il est clair * dans cette supposition que la ligne courbe *AMB* est une Parabole qui a pour diametre la ligne *AC*, pour une ordonnée à ce diametre la droite *PM*, & pour parametre de ce diametre la donnée *a*. *Art.19. Mais si l'on suppose à present que la nature de la courbe *AMB* soit exprimée par l'équation $y^3 = aax$, ou par cette autre $y^3 = axx$; cette ligne courbe sera nommée *Parabole cubique* ou *du troisiéme degré*; parce que celle des deux indéterminées *x* ou *y*, dont la puissance est la plus élevée, monte au troisiéme degré. De même si l'équation est $y^4 = a^3 x$, ou $y^4 = a x^3$; la ligne courbe *AMB* est appellée *Parabole du quatriéme degré*; parce que l'indéterminée *y* dont la puissance est la plus haute, monte au quatriéme degré. Il en est ainsi de toutes les autres à l'infini.

5.

Soit comme dans la définition précédente une ligne droite FIG. CXXIV. *AC* qui ait pour origine le point fixe *A*; & soit une ligne courbe *BM*, telle qu'ayant mené d'un de ses points quelconques *M* la droite *MP* qui fasse avec *AC* un angle donné *APM*, & ayant nommé *AP*; *x*; *PM*, *y*; on ait toujours $xy = aa$ (la lettre *a* marque une ligne donnée): il est clair * que cette ligne courbe sera une Hyperbole, qui aura pour l'une de ses a- *Art.101.

ſymptotes la ligne *AC*, & pour l'autre, la ligne *AD* parallele à *PM*, & dont la puiſſance ſera le quarré *aa*. Mais ſi l'équation qui exprime la nature de la courbe *BM* eſt $xxy = a^3$; cette ligne courbe ſera nommée *Hyperbole cubique* ou *du troiſiéme degré*, parce que le produit *xxy* des deux indéterminées *x* & *y*, a trois dimenſions. De même, ſi l'équation étoit $x^3 y = a^4$; la ligne courbe *BM* ſeroit une *Hyperbole du quatriéme degré*; parce que le produit $x^3 y$ a quatre dimenſions. Il en eſt ainſi de toutes les autres à l'infini.

COROLLAIRE I.

229. SI l'on ſuppoſe que la lettre *m* marque un nombre entier quelconque qui ſoit l'expoſant de la puiſſance de l'indéterminée *AP* (*x*); & de même que la lettre *n* marque l'expoſant de la puiſſance de l'autre indéterminée *PM* (*y*): il eſt clair que l'équation $y^n = x^m \times a^{n-m}$ (ou ſimplement $y^n = x^m$, en faiſant pour abreger la donnée $a = 1$) exprimera la nature des Paraboles de tous les degrés à l'infini. On voit de même que l'équation $x^m y^n = a^{m+n}$ ou ſimplement $x^m y^n = 1$, en faiſant $a = 1$) exprime en general la nature des Hyperboles de tous les degrés à l'infini.

FIG. CXXIII. & CXXIV.

COROLLAIRE II.

230. SI l'on mene par l'origine fixe *A* de la ligne *AC* une ligne droite indéfinie *AD* parallele à *PM*; & qu'ayant tiré *MK* parallele à *AC*, qui rencontre *AD* au point *K*, on nomme les indéterminées *AK*, *x*; *KM*, *y*; il eſt clair que l'indéterminée *x* qui exprimoit auparavant la ligne *AP* ou *MK*, devient à preſent *y*, & qu'au contraire *y* qui exprimoit *PM* ou *AK*, devient à preſent *x*. D'où il ſuit.

FIG. CXXIII. 1°. Que ſi la courbe *AMB* eſt une Parabole ordinaire, elle aura pour équation $yy = ax$ ou $xx = ay$, ſelon qu'on rapportera ſes points à ceux de la ligne *AC* ou *AD*; & de même que la Parabole cubique qui a pour équation $y^3 = axx$ lorſqu'on rapporte ſes points à ceux de la ligne *AC*, aura pour équation $x^3 = aay$ lorſqu'on les rapporte à ceux de la ligne *AD*; & en general que ſi la ligne courbe *AMB* a pour équation $y^n = x^m a^{n-m}$ étant rapportée à la ligne droite *AC*, cette même courbe aura pour équation $x^n = y^m a^{n-m}$ (l'on ſuppoſe que *n* ſurpaſſe *m*) étant rapportée à la ligne *AD*.

2°. Que l'Hyperbole ordinaire a toujours la même équation $xy = aa$, soit qu'on la rapporte à la ligne AC ou à la ligne AD; que l'Hyperbole cubique qui a pour équation $xxy = a^3$ étant rapportée à AC, aura pour équation $xyy = a^3$ étant rapportée à l'autre ligne AD; & en general que l'Hyperbole qui a pour équation $x^m y^n = a^{m+n}$ lorsqu'on rapporte ses points à ceux de la ligne AC, aura pour équation $x^n y^m = a^{m+n}$ lorsqu'on les rapporte à ceux de la ligne AD. FIG. CXXIV.

COROLLAIRE III.

231. DE-LA il est évident qu'il y a deux Paraboles cubiques dont l'une a pour équation $y^3 = aax$ ou $x^3 = aay$, & l'autre $y^3 = axx$ ou $x^3 = ayy$; au lieu qu'il n'y a qu'une seule Hyperbole cubique $xxy = a^3$ ou $xyy = a^3$. Car les indéterminées x & y ne peuvent être combinées que des quatre premieres manieres pour exprimer les Paraboles cubiques ou du troisiéme dégré; & des deux secondes pour exprimer les Hyperboles cubiques. Or comme les quatre premieres égalités appartiennent à deux differentes courbes, & les deux secondes à la même; il s'ensuit, &c. On peut trouver par la même voïe le nombre des Paraboles ou des Hyperboles du quatriéme, cinquiéme degré, &c.

COROLLAIRE IV.

232. NON-SEULEMENT l'Hyperbole ordinaire a pour asymptotes les lignes droites indéfinies AC, AD; mais encore celle de tous les degrés à l'infini. Car soit l'équation generale $x^m y^n = a^{m+n}$ ou $y^n = \frac{a^{m+n}}{x^m}$ ($AP = x$, $PM = y$) qui exprime la nature de telle Hyperbole qu'on voudra, lorsqu'on rapporte ses points à ceux de la ligne AC; il est manifeste que plus AP (x) augmente, plus au contraire y^n, & par conséquent PM (y) diminuë; de sorte que x étant infiniment grande, PM (y) devient nulle ou zero: c'est à dire que l'Hyperbole BM & la ligne AC, étant prolongées l'une & l'autre à l'infini, s'approchent toujours de plus en plus jusqu'à ce qu'enfin elles se joignent dans l'infini même; ce qui constituë l'essence d'une asymptote. Maintenant si l'on rapporte les points de la même Hyperbole à ceux de la ligne AD, on aura $x^n y^m = a^{m+n}$ ou $y^m = \frac{a^{m+n}}{x^n}$ ($AK = x$, $KM = y$); d'où il suit FIG. CXXIV.

que plus AK (x) devient grande, plus au contraire KM (y) devient petite, & cela à l'infini; & qu'ainsi la ligne AD est encore une asymptote de la même Hyperbole.

PROPOSITION XI.

Problême.

233. Fig. CXXIII. *Soit proposé de mener d'un point donné* M *sur la seconde Parabole cubique* AMB, *dont la nature est exprimée par l'équation* $y^3 = axx$, *la tangente* MT.

Ayant supposé l'arc MN infiniment petit, & mené NQ parallele à PM, & MR parallele à AC: le petit triangle MRN sera semblable au grand TPM; puisque le petit arc * Art. 189. MN peut être regardé * comme la prolongation de la tangente TM. Cela posé, on nommera la soûtangente cherchée TP, s; & la petite droite PQ ou MR, e; ce qui donnera $RN = \frac{ey}{s}$, à cause des triangles semblables TPM, MRN. Or si l'on met le cube de QN ($y + \frac{ey}{s}$) à la place de y^3 dans l'équation $y^3 = axx$ qui exprime la nature de la courbe AMB; & à la place de xx, le quarré de AQ ($x + e$): il est évident qu'on formera une équation $y^3 + \frac{3ey^3}{s} + \frac{3eey^3}{ss} + \frac{e^3y^3}{s^3} = axx + 2eax + eea$ qui exprimera le rapport de AQ à QN. Et si l'on retranche par ordre des deux membres de cette derniere équation ceux de la premiere, & qu'on divise ensuite par e, on trouvera $\frac{3y^3}{s} + \frac{3ey^3}{ss} + \frac{eey^3}{s^3} = 2ax + ea$; dans laquelle effaçant tous les termes où e se rencontre, parce que PQ (e) étant infiniment petite ou nulle, ces termes sont nuls par rapport aux autres; il vient enfin $\frac{3y^3}{s} = 2ax$; & partant PT (s) $= \frac{3y^3}{2ax} = \frac{3}{2}x$ en mettant pour y^3 sa valeur axx. *Ce qu'il falloit trouver.*

REMARQUE.

234. Si l'on fait attention sur le calcul précédent, on verra avec évidence qu'en substituant à la place de la puissance de y, une pareille puissance de $y + \frac{ey}{s}$, on n'a besoin que des deux premiers termes de cette puissance. Car tous les autres étant multipliés par les puissances de e, ils renferment chacun e, ou des puissances de e, dans la derniere équation que l'on trouve

trouve à la fin de l'operation; & doivent par conſéquent être effacés. Il en eſt de même lorſqu'on ſubſtituë à la place de la puiſſance de x, une pareille puiſſance de $x + e$. Mais ſi l'on forme de ſuite toutes les puiſſances du binome $x + e$, on aura pour les deux premiers termes de la ſeconde puiſſance $x^2 + 2ex$; de la troiſiéme $x^3 + 3exx$; de la quatriéme $x^4 + 4ex^3$; de la cinquiéme $x^5 + 5ex^4$; & ainſi de ſuite à l'infini. De ſorte que les deux premiers termes d'une puiſſance quelconque m de $x + e$, ſeront $x^m + me\,x^{m-1}$. On trouvera de même que les deux premiers termes d'une puiſſance quelconque n du binome $y + \frac{ey}{s}$, ſeront $y^n + \frac{ney^n}{s}$.

COROLLAIRE.

235. DE-LA on voit que pour trouver une expreſſion générale de la ſoûtangente PT (s) des Paraboles de tous les degrés à l'infini; il n'y aura qu'à ſe ſervir de l'équation générale $y^n = x^m a^{n-m}$, ou (prenant a pour l'unité) $y^n = x^m$ qui exprime la nature de toutes ces Paraboles. Voici comment.

On mettra dans l'équation générale $y^n = x^m$ à la place de y^n, les deux premiers termes de la puiſſance n de $y + \frac{ey}{s}$, c'eſt à dire, $y^n + \frac{ney^n}{s}$; & de même à la place de x^m, les deux premiers termes de la puiſſance m de $x + e$, c'eſt à dire, $x^m + mex^{m-1}$: ce qui donnera $y^n + \frac{ney^n}{s} = x^m + me\,x^{m-1}$. Et retranchant par ordre les membres de la premiere équation de ceux de celle-ci, & diviſant enſuite par e, l'on aura $\frac{ny^n}{s} = mx^{m-1}$; & partant $s = \frac{ny^n}{mx^{m-1}} = \frac{n}{m}x$ en mettant pour y^n ſa valeur x^m.

PROPOSITION XII.

Problême.

236. *MENER les tangentes des Hyperboles de tous les dégres à l'infini.* FIG. CXXIV.

La même préparation étant faite que dans la propoſition précédente, on mettra dans l'équation générale $x^m y^n = a^{m+n}$ qui exprime le rapport de AP (x) à PM (y), à la place de x^m les deux premiers termes de la puiſſance m de AQ ($x+e$) c'eſt à dire, $x^m + mex^{m-1}$; & de même à la place de y^n les

deux premiers termes de la puissance n de QN $(y - \frac{ey}{s})$ c'est à dire $y^n - \frac{ney^n}{s}$: ce qui par la multiplication donne cette autre équation $x^m y^n + mey^n x^{m-1} - \frac{ney^n x^m}{s} - \frac{mneey^n x^{m-1}}{s} = a^{m+n}$ qui exprimera le rapport de AQ à QN. Et retranchant par ordre des deux membres de cette derniere équation, ceux de la premiere; & divisant ensuite par ey^n; il vient $mx^{m-1} - \frac{nx^m}{s} - \frac{mne\,x^{m-1}}{s} = o$; dans laquelle équation effaçant le terme $- \frac{mne\,x^{m-1}}{s}$ qui est nul par rapport aux deux autres, parce qu'il renferme dans son expression la ligne infiniment petite ou nulle PQ (e), on trouve en transposant à l'ordinaire PT $(s) = \frac{nx^m}{mx^{m-1}} = \frac{n}{m}x$.

COROLLAIRE.

237. Fig. CXXIII. & CXXIV. Il est donc évident que pour mener la Tangente MT d'un point donné M sur une Parabole ou une Hyperbole de tel degré qu'on voudra ; dont l'équation est pour la Parabole $y^n = x^m a^{n-m}$, & pour l'Hyperbole $x^m y^n = a^{m+n}$: il ne faut que prendre la soûtangente $PT = \frac{n}{m} AP$ du même côté du point A par rapport au point P, lorsque c'est une Parabole ; & du côté opposé, lorsque c'est une Hyperbole.

PROPOSITION XIII.

Theorême.

238. Fig. CXXV. *Soit comme dans la définition quatriéme, une Parabole* AMB *de tel degré qu'on voudra, dont la nature est exprimée par l'équation* $y^n = x^m a^{n-m}$: *soit menée d'un de ses points quelconques* B *la droite* BC *qui fasse avec* AC *l'angle donné* ACB, *& soit achevé le parallelogramme* ACBD. *Je dis que le parallelogramme circonscrit* ACBD *est à l'espace Parabolique* ACBMA *compris par les droites* AC, CB, *& par la portion de Parabole* AMB ; *comme* m + n *est à* n.

Il faut prouver que ACBD. ACBMA :: m + n. n.

Ayant supposé sur la portion de Parabole AMB l'arc MN infiniment petit, ou si l'on aime mieux, indéfiniment petit, c'est à dire, moindre qu'aucune portion donnée de la Parabo-

le, si petite qu'elle puisse être ; & mené les droites *MP*, *NQ*, paralleles à *BC* ; & *MK*, *NL*, paralleles à *AC* ; lesquelles forment par leurs rencontres les petit parallelogramme *MRNS* : on tirera la tangente *MT* qui rencontre le diametre *AC* au point *T*, par où l'on menera une parallele à *CB*, qui rencontre les lignes *MK*, *NL*, aux points *F*, *G*. Cela fait, on regardera * le petit arc *MN* comme l'un des petits côtés du Polygone qui compose la portion de Parabole *AMB*, & la tangente *MT* comme le prolongement de ce petit côté ; de sorte que l'on a deux triangles rectilignes *NRM*, *MPT*, qui sont semblables : c'est pourquoi *NR* ou *MS*. *RM* :: *MP*. *PT* ou *MF*. Et partant le parallelogramme *PMRQ* est égal au parallelogramme *FMSG* ; puisque les angles *PMR*, *FMS*, sont égaux, & que les côtés autour de ces angles sont reciproquement proportionnels. Or * *MF* ou *PT* $= \frac{n}{m}$ *AP* ou $\frac{n}{m}$ *MK*. Donc aussi le parallelogramme *FMSG* ou son égal *PMRQ* $= \frac{n}{m}$*KMSL*. Et comme cela arrive toujours en quelque endroit de la portion de Parabole *AMB* que tombe le petit arc *MN* ; il s'ensuit que la somme de tous les petits parallelogrammes *PMRQ*, c'est à dire, * le Triligne parabolique *ACBMA* $= \frac{n}{m}$ *ADBMA* somme de tous les petits parallelogrammes $\frac{n}{m}$*KMSL*. On aura donc *ADBMA*. *ACBMA* :: *m*. *n*. Et par conséquent *ADBMA* + *ACBMA* ou *ACBD*. *ACBMA* :: *m* + *n*. *n*. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* *Art.* 189.

* *Art.* 237.

* *Art.* 184.

COROLLAIRE.

239. DE-LA il est évident que le Triligne parabolique *APM* est au parallelogramme circonscrit *APMK*, comme *n* est à *m* + *n* : & qu'ainsi le Trapese parabolique *MPCB* $= \frac{m}{m+n}$ *ABCD* — $\frac{n}{m+n}$ *APMK* ; puisque *ACBMA* $= \frac{n}{m+n}$ *ACBD*, & *APM* $= \frac{n}{m+n}$ *APMK*.

PROPOSITION XIV.

Theorême.

240. *SOIT comme l'on a expliqué dans la définition cinquiéme, une Hyperbole* BMO *de tel degré qu'on voudra, dont la nature est exprimée par l'équation* $x^m y^n = a^{m+n}$: *soit menée d'un de ses points quelconques* B *la ligne* BC *parallele à l'une* FIG. CXXVI.

des asymptotes AD, *& terminée par l'autre en* C; *& soit achevé le parallelogramme* ACBD. *Je dis que ce parallelogramme inscrit* ACBD *est à l'espace hyperbolique* ECBMO *renfermé par la droite déterminée* BC, *par la ligne* CE *prolongée à l'infini du côté de* E, *& par la portion d'Hyperbole* BMO, *prolongée aussi à l'infini du côté de* O; *comme* m — n *est à* n.

Il faut prouver que ACBD. ECBMO :: m — n. n.

La même préparation étant faite que dans la proposition précédente, on prouvera de la même maniere que le petit parallelogramme $PMRQ = \frac{n}{m} KMSL$. Or comme cela arrive toujours en quelque endroit de la portion d'Hyperbole *BMO* que tombe le petit arc *MN*; il s'ensuit que la somme
* Art. 184. de tous les petits parallelogrammes *PMRQ*, c'est à dire, * l'espace $ECBMO = \frac{n}{m} EADBMO$ somme de tous les petits parallelogrammes $\frac{n}{m} KMSL$. On aura donc *EADBMO. ECBMO* :: *m. n*; & partant *EADBMO — ECBMO*, ou *ACBD. ECBMO* :: *m — n. n. Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

241. DE-LA il est évident que le Trapese hyperbolique $CPMB = \frac{n}{m-n} ACBD - \frac{n}{m-n} APMK$; puisque $ECBMO = \frac{n}{m-n} ACBD$, & que par la même raison l'espace $EPMO = \frac{n}{m-n} APMK$.

COROLLAIRE II.

242. DE-LA il suit:

1°. Que lorsque *m* surpasse *n*; le rapport du parallelogramme inscrit *ACBD* à l'espace *ECBMO* indéfiniment étendu du côté de *E*, sera toujours exprimé par des nombres positifs; & qu'ainsi on aura toujours dans ce cas la quadrature absoluë de cet espace.

2°. Que lorsque *m* = *n*, ce qui arrive dans l'Hyperbole ordinaire; on trouve que le parallelogramme *ACBD* est à l'espace hyperbolique *ECBMO*, comme zero est à l'unité : c'est à dire que cet espace est infini par rapport au parallelogramme inscrit *ABCD*.

3°. Que lorsque *m* est moindre que *n*; le parallelogramme inscrit *ACBD* sera à l'espace hyperbolique *ECBMO* comme un nombre négatif à un nombre positif: ce qui fait voir alors

que la raiſon de cet eſpace au parallelogramme *ACBD*, eſt pour ainſi dire plus qu'infinie. Mais on doit remarquer dans ce dernier cas, que l'eſpace hyperbolique renfermé par la droite *DB*, par l'aſymptote *AD* prolongé à l'infini du côté de *D*, & par l'Hyperbole *OMB* auſſi prolongée à l'infini du côté de *B*, ſera au parallelogramme inſcrit *ACBD*, comme *m* eſt à $n - m$, c'eſt à dire, que cet eſpace ſera quarrable; car prenant les indéterminées (x) ſur l'aſymptote *AD*, au lieu qu'on les avoit priſes ſur l'aſymptote *AC*, l'équation à l'Hyperbole deviendra * $x^n y^m = a^{m+n}$. * *Art.* 230.

PROPOSITION XV.

Theorême.

243. *Soit dans l'angle droit* CAD *une ligne courbe quelconque* AMB, *dont l'on ſçache mener la tangente* MT; *& ſoit dans l'angle* DAH *qui eſt à côté de celui-ci, une autre ligne courbe* HFE, *telle qu'ayant mené d'un de ſes points quelconques* F *la ligne* FM *parallele à* AC, *qui rencontre en* K *la ligne* AD, *& en* M *la premiere courbe* AMB, *& ayant tiré la tangente* MT, *qui rencontre* AC *au point* T: *on ait toujours comme* AK *eſt à* MT *ainſi une ligne conſtante* a *qui demeure toujours la même en quelque endroit que tombe le point* F, *eſt à* KF. *Je dis que ſi par un point quelconque* D *de la ligne* AD *l'on mene une ligne droite* EB *parallele à* AC *& terminée par les deux courbes; l'eſpace* ADEFH *ſera égal au rectangle de la courbe* AMB *par la conſtante* a. Fig. CXXVII.

Il faut prouver que ADEFH = AMB × a.

Ayant ſuppoſé par tout où l'on voudra ſur la courbe *AMB* l'arc *MN* infiniment petit, & mené les droites *MF*, *NG*, paralleles à *AC*; & qui rencontre la droite *AD* aux points *K*, *L*, & la courbe *HFE* aux points *F*, *G*, on tirera les droites *FS*, *MR*, paralleles à *AD*, & on prolongera *RM* juſqu'à ce qu'elle rencontre *AC* en *P*. Cela poſé, les deux triangles rectangles ſemblables *MPT*, *MRN*, donnent *MR*. *MN* :: *MP* ou *AK*. *MT* :: *a*. *KF*. Et partant *KF* × *MR*, c'eſt à dire, le petit rectangle *FKLS* = *MN* × *a*. Or comme cela arrive toujours en quelque en-

droit de la Courbe *AMB* qu'on prenne le petit arc *MN*, il s'ensuit que la somme de tous les petits rectangles *KLSF*, * c'est à dire, l'espace *ADEFH* sera égal à la somme de tous les petits rectangles $MN \times a$, c'est à dire, au rectangle de la courbe *AMB* par la constante *a*. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

244. DE LA il est évident que le rectangle de la portion *AM* par la constante *a*, est égal à l'espace *AKFH*; & de même que le rectangle de la portion *MB* par la même ligne *a*, est égal à l'espace *KDEF*.

COROLLAIRE II.

245. SI l'on suppose que la Courbe *AMB* soit la seconde Parabole cubique, qui ait pour équation $y^3 = axx$ ($AP = x$, $PM = y$); on aura * $PT = \frac{3}{2}x$; & à cause du triangle rectangle *MPT*, l'hypothenuse $MT = \sqrt{yy + \frac{9}{4}xx}$. Mais par la proprieté de la Courbe *HFE*, il faut que *MP* (y). *MT* ($\sqrt{yy + \frac{9}{4}xx}$) :: $a.KF$. Ce qui donne $\overline{KF}^2 = aa + \frac{9aaxx}{4yy}$ $= aa + \frac{9}{4}ay$, en mettant pour axx sa valeur y^3. D'où l'on voit que la Courbe *HFE* est dans ce cas une Parabole, qui a pour axe la ligne *AD*, dont l'origine est au point *O*, pris de l'autre côté du point *D* par rapport au point *A*, en sorte que $AO = \frac{4}{9}a$, & dont le parametre $= \frac{9}{4}a$: car par la proprie-

*Art. 19. té de cette Parabole * le quarré de l'ordonnée *KF* sera égal au rectangle de *KO* par le parametre $\frac{9}{4}a$, c'est à dire en termes analytiques, $\overline{KF}^2 = aa + \frac{9}{4}ay$. Or comme les Trape-

*Art. 239. ses paraboliques *ADEH*, *AKFH*, sont * quarrables, il s'ensuit qu'on a la rectification tant de la Courbe *AMB*, que d'une de ses portions quelconques *AM*.

*Art. 233. (renvoi de l'art. 245)

Si l'on veut exprimer au juste la valeur de la portion *AM*, on remarquera que *AH* est $= a$; puisque $\overline{AH}^2 = AO \times \frac{9}{4}a$ $= aa$. Ainsi ayant nommé la tangente *MT*, *t*; la ligne *AK* ou *MP*, *y*; on aura $KF = \frac{at}{y}$, & le Trapese parabolique

*Art. 239. *FAKH* ou * $\frac{2}{3}FK \times KO - \frac{2}{3}HA \times AO = \frac{2}{3}at + \frac{8aat}{27y} - \frac{8}{27}aa = AM \times a$. C'est à dire en divisant par *a*, que la portion cherchée $AM = \frac{2}{3}t + \frac{8at}{27y} - \frac{8}{27}a$. Ce qui donne cette construction.

Ayant mené du point donné M ſur la ſeconde Parabole cubique AMB, la tangente MT qui rencontre en Q la ligne AK menée par l'origine A de l'axe AC perpendiculairement à cet axe, on prendra ſur cette ligne la partie $AV = \frac{8}{27} a$; & ayant tiré VC parallele à MT qui rencontre l'axe en C, on décrira du centre V & du rayon VA un arc de cercle qui coupe VC en X. Je dis que la portion AM de la ſeconde Parabole cubique AMB ſera égale à la ſomme des deux droites MQ, CX.

Car à cauſe des triangles ſemblables TPM, TAQ, il eſt clair que $MQ = \frac{2}{3} MT$ (t), puiſque $AP = \frac{2}{3} PT$; & à cauſe des triangles ſemblables MPT, VAC, il vient $MP (y). MT (t) :: AV (\frac{8}{27} a). VC = \frac{8at}{27y}$, & partant $CX = \frac{8at}{27y} = \frac{8}{27} a$. Donc &c.

PROPOSITION XVI.

Theorême.

246. *Soit une Hyperbole équilatere* EAF, *qui ait pour centre le point* C, *& pour la moitié de ſon premier axe la droite* CA; *avec une Parabole* NCS *qui ait pour axe la ligne* AC *prolongée du côté de* C *qui en ſera l'origine, & pour parametre de l'axe une ligne double de* CA. *Si l'on mene par un point quelconque* N *de la Parabole* NCS, *une parallele* NE *à* CA, *qui rencontre l'Hyperbole* EAF *au point* E, *& ſon ſecond axe* CL *au point* L; *je dis que l'eſpace hyperbolique* CLEA *renfermé entre les droites* AC, CL, LE, *& la portion* EA *de l'Hyperbole, eſt égal au rectangle de la portion* CN *de la Parabole par la droite* AC. Fig. CXXVIII.

Ayant mené par un point quelconque M de la portion CN de la Parabole, une perpendiculaire MG à la tangente MT qui paſſe par ce point, terminées l'une & l'autre par l'axe aux points G, T, & une parallele MB à CA, qui rencontre l'Hyperbole en B, & ſon ſecond axe CL en H: les lignes MG, HB, ſeront égales entr'elles. Car menant l'ordonnée MP à l'axe on aura * $PG = CA$; & à cauſe du triangle rectangle MPG, le quarré $\overline{MG}^2 = \overline{PM}^2 + \overline{PG}^2 = \overline{CH}^2 + \overline{CA}^2 =$ * $\overline{HB}^2$, à cauſe de l'Hyperbole équilatére EAF; & partant $MG = HB$. Or les triangles rectangles ſemblables

* Art. 24.

* Art. 127.

TPM, *MPG*, donnent *MP* ou *CH*. *MT* :: *PG* ou *CA*. *MG*
* *Art.* 243. ou *HB*. Donc * &c.

COROLLAIRE I.

247. DE LA il est évident que le Trapese hyperbolique *HLEB* est égal au rectangle de la portion de Parabole *MN* par la moitié *CA* du parametre de son axe.

COROLLAIRE II.

248. SI l'on mene dans l'Hyperbole équilatére *EAF* deux paralleles quelconques *BD*, *EF*; & qu'on tire par leurs extremités des lignes droites *BM*, *EN*, *DR*, *FS*, paralleles à *AC*, lesquelles rencontrent le second axe de l'Hyperbole aux points *H*, *L*, *K*, *O*; la difference des rectangles $AC \times MN$, $AC \times RS$, sera égale (en tirant les droites *BE*, *DF*,) à la difference des Trapeses rectilignes *HLEB*, *KOFD*.

* *Art.* 247. Car le rectangle $AC \times MN$ est égal * au Trapese hyperbolique *HLEB*; & par consequent le rectangle $AC \times MN$ plus le segment hyperbolique *BE* sera égal au Trapese rectiligne *HLEB*: de même le rectangle $AC \times RS$ plus le segment hyperbolique *DF* sera égal au Trapese rectiligne *KOFD*. Donc puisque les deux segmens hyperboliques *EB*, *DF*, sont
* *Art.* 204. * égaux entr'eux, la difference des rectangles $AC \times MN$, $AC \times RS$, sera égale à la difference des Trapeses rectilignes *HLEB*, *KOFD*. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE III.

249. LES mêmes choses étant posées que dans le Corollaire précédent; si l'on fait $2AC . LH :: \overline{BH + LE}\ m$. il est clair que le rectangle $AC \times m = \frac{1}{2} LH \times \overline{BH + LE}$, c'est à dire, égal au Trapese rectiligne *HLEB*. De même si l'on fait $2AC . KO :: KD + FO . n$. il est clair que $AC \times n$ est égal
* *Art.* 248. au Trapese rectiligne *KOFD*. Par conséquent * la difference des rectangles $AC \times MN$, $AC \times RS$, sera égale à la difference des rectangles $AC \times m$, $AC \times n$; c'est à dire, en divisant par *AC*, que la difference des arcs paraboliques *MN*, *RS*, sera égale à la difference des droites *m*, *n*. D'où l'on voit qu'on peut trouver des lignes droites égales à la difference d'une infinité d'arcs Paraboliques tels que *MN*, *RS*.

LIVRE.



Wisthon Elem: V2:



LIVRE SIXIÉME.

Des Sections Coniques considerées dans le Solide.

CHAPITRE PREMIER.

Des trois Sections Coniques en général.

DÉFINITIONS.

I.

I par un point fixe *S* élevé au dessus du plan Fig. CXXIX.
d'un cercle *VXY*, on fait mouvoir une ligne droite *SZ* indéfiniment prolongée de part & d'autre du point *S*, autour de la circonference du cercle, en sorte qu'elle fasse un tour entier; les deux surfaces convexes produites par la ligne droite indéfinie *SZ* dans ce mouvement, sont appellées chacune separément *Surface Conique*, & toutes deux ensemble *Surfaces Coniques opposées*.

2.

Le point fixe *S* qui est commun à l'une & à l'autre Surface Conique, est nommé *Sommet*.

3.

Le cercle *VXY*, *Base*.

4.

Le Solide compris par la base *VXY*, & par la portion de la Surface Conique que cette base coupe depuis le Sommet *S*, est appellé *Cone*.

5.

La ligne *SX* menée du Sommet *S* à un point quelconque *X* de sa base, en est un des *Côtés*.

6.

La ligne *SO* menée du Sommet *S* du Cone par le centre *O* de la base, en est l'*Axe*.

7.

On dit qu'un Cone est *droit*, lorsque son axe est perpendiculaire sur le plan de sa base ; & au contraire qu'il est *scalene*, lorsque son axe est oblique sur ce plan.

8.

FIG. CXXX. CXXXI. CXXXII. Si l'on coupe une Surface Conique par un plan *FAG* qui ne passe point par le Sommet *S*, & qui ne soit point parallele au plan de la base *VXY*; la ligne courbe *FAG* formée par la rencontre de ce plan avec la Surface Conique, est appellée *Section Conique*.

9.

Si l'on mene par le Sommet *S* d'un Cone, un plan *SDE* parallele au plan d'une Section Conique ; la droite indéfinie *DE* formée par la rencontre de ce plan avec celui de la base du Cone, s'appellera *Directrice*.

10.

Une Section Conique *FAG* est appellée *Parabole*, lorsque la Directrice *DE* touche le cercle qui est la base du Cone : *Ellipse*, lorsqu'elle tombe toute entiere au dehors : & *Hyperbole*, lorsqu'elle le traverse.

FIG. CXXXII. Mais dans ce dernier cas, si l'on prolonge le plan de la Section, il est visible qu'il rencontrera la Surface Conique opposée ; la ligne courbe *KMH* formée par cette rencontre, sera nommée *Hyperbole opposée* à la premiére *FAG* ; & les deux ensemble, *Hyperboles* ou *Sections opposées*.

11.

FIG. CXXX. CXXXI. CXXXII. Si dans le plan d'une Section Conique il y a une ligne droite qui ne la rencontre qu'en un seul point, & qui étant prolongée indéfiniment de part & d'autre n'entre point dedans, mais tombe toute entiere au dehors ; cette ligne sera nommée *Tangente*, & le point où elle rencontre la Section, point d'*Attouchement*.

COROLLAIRE I.

250. FIG. CXXX. DANS la Parabole tous les côtés du Cone étant prolongés indéfiniment rencontreront nécessairement son plan, excepté

le seul côté *SD* tiré du Sommet *S* par le point D où la Directrice *DE* touche la base ; puisqu'il n'y a que ce côté qui soit dans le plan *SDE* parallele à celui de la Section, & que tous les autres le coupent dans le point *S*. D'où il est clair que la Parabole s'étend à l'infini, & ne rentre point en elle même.

COROLLAIRE II.

251. DANS l'Ellipse tous les côtés du Cone étant prolongés, s'il est nécessaire, rencontrent son plan ; puisque le plan *SDE* qui lui est parallele, est rencontré par tout dans le point *S*. D'où l'on voit qu'elle renferme un espace en rentrant en elle même. FIG. CXXXI.

COROLLAIRE III.

252. DANS les Hyperboles opposées tous les côtés du Cone (excepté les deux *SD*, *SE*, tirés du Sommet *S*. aux points *D*, *E*, où la Directrice coupe la base) étant prolongés indéfiniment de part & d'autre du Sommet *S*, rencontrent nécessairement leur plan ; puisqu'il n'y a que ces deux côtés qui tombent dans le plan *SDE* parallele au plan de ces deux Hyperboles, & que tous les autres le coupent dans le point *S*. Les côtés de la portion *SDVE* forment les points de l'Hyperbole *FAG*, & ceux de la portion *SDYE* étant prolongés de l'autre côté du Sommet *S*, forment les points de son opposée *KMH*. D'où l'on voit que les Hyperboles opposées, s'étendent chacun à l'infini, & ne rentrent point en elles-mêmes, non plus que la Parabole. FIG. CXXXII.

PROPOSITION I.

Theorême.

253. *SI l'on coupe deux surfaces Coniques opposées, par un plan* Sam *qui passant par leur Sommet* S, *entre au dedans, je dis qu'il formera par sa rencontre avec ces deux Surfaces, deux lignes droites* Sa, Sm, *indéfiniment prolongées de part & d'autre du point* S. FIG. CXXXIII.

Car soit *am* la commune Section du plan coupant, & du plan de la base : il est clair qu'elle rencontrera cette base en deux points *a*, *m* ; puisque par la supposition le plan *Sam* entre au dedans de la surface Conique. Or si l'on mene les côtés

Sa, *Sm*, indéfiniment prolongés de part & d'autre du sommet *S*; il est évident par la génération des Surfaces Coniques opposées que ces côtés seront les deux communes Sections de ces deux Surfaces, avec le plan coupant *Sam*. *C'est ce qu'il falloit démontrer*.

COROLLAIRE I.

254. COMME la partie de la ligne *am* qui joint les deux points *a*, *m*, de la circonference, tombe au dedans de la base, & que tout le reste de cette ligne tombe au dehors; il s'ensuit que si l'on conçoit que le plan *Sam* soit indéfiniment étendu tout autour du Sommet *S*, la partie de ce plan qui sera renfermée dans l'angle *aSm*, & dans son opposé au Sommet, tombera au dedans des deux Surfaces Coniques opposées, & que tout le reste de ce plan tombera entre ou (ce qui est la même chose) au dehors de ces deux Surfaces.

COROLLAIRE II.

255. DE-LA il suit que si l'on joint deux points quelconques *A*,
FIG. CXXX. *M*, d'une Section Conique par une ligne droite, elle sera renfermée au dedans de la Section; & qu'étant prolongée indéfiniment de part & d'autre, elle tombera toute entiere au dehors. Car menant du Sommet *S* par les points *A*, *M*, les côtés *Sa*, *Sm*, & faisant passer un plan par ces côtés; il est clair que la ligne *AM* tombe dans la partie de ce plan qui est renfermée dans l'angle *aSm*, & que tout le reste de cette ligne se trouve dans la partie de ce plan qui tombe dans les angles à côté.

COROLLAIRE III.

256. SI l'on mene par le Sommet *S* du cone une ligne parallele à une ligne *AM* terminée par une Section Conique; il est clair par le Corollaire précédent que cette ligne *SH*, tombera dans l'un des angles à côté de l'angle *aSm*, c'est à dire au dehors de la surface Conique; & qu'ainsi elle ira rencontrer le plan de la base en quelque point hors la circonference du cercle, ou bien qu'elle lui sera parallele.

COROLLAIRE IV.

257. IL suit encore du Corollaire premier que si l'on joint deux points quelconques *A*, *M*, de deux Hyperboles opposées par une ligne droite, elle sera renfermée entre ces Hyperboles ; & qu'étant indéfiniment prolongée de part & d'autre, elle entrera au dedans. Car menant par le Sommet *S* les côtés *Sa*, *Sm*, qui passent par les points *A*, *M*, & faisant passer par ces côtés un plan indéfiniment étendu tout autour du point *S* ; il est clair que la partie de ce plan qui est renfermée dans l'angle *ASM* ou tombe la ligne *AM*, est comprise entre ces deux Surfaces, & que la partie du même plan qui est renfermée entre les deux angles à côté où se trouvent les prolongemens de la ligne *AM*, tombent au dedans de ces deux Surfaces. Or comme la ligne *AM* est la commune Section du plan *Sam* avec celui des deux Hyperboles opposées, il s'ensuit &c. Fig. CXXXII.

COROLLAIRE V.

258. IL suit aussi des Corollaires deuxiéme & quatriéme, qu'une ligne droite ne peut rencontrer une Section Conique, ou les deux Hyperboles opposées, au plus qu'en deux points.

PROPOSITION II.

Theorême.

259. *Si l'on coupe l'une ou l'autre des deux Surfaces Coniques opposées, par un plan* ovxy *parallele à la base* OVXY ; *je dis que la Section qu'il forme par sa rencontre avec la Surface Conique, est un cercle qui a pour centre le point* o, *où ce plan rencontre l'axe* SO, *prolongé de l'autre côté du Sommet* S, *lorsqu'il est necessaire.* Fig. CXXIX.

Car si l'on mene par un point quelconque *X* de la base au centre *O* le rayon *XO*, & au Sommet *S* le côté *XS* qui rencontre le plan *ovxy* au point *x* : les lignes *OX*, *ox*, seront paralleles entr'elles ; puisqu'elles sont les communes Sections de deux plans paralleles *OVXY*, *ovxy*, par le même plan *SOX* prolongé, s'il est nécessaire de l'autre côté du Sommet *S*. Les triangles *OSX*, *oSx*, seront donc semblables ; & par consé-

quent on aura toujours *SO. OX* :: *So. ox*. Or les premiers termes de cette proportion étant par tout les mêmes, le quatriéme *ox* ne changera point de grandeur en quelque endroit que tombe le point *x*. D'où l'on voit que la ligne courbe *vxy* est la circonference d'un cercle qui a pour centre le point *o*.

COROLLAIRE.

260. Il suit de-là qu'on peut placer la base d'un cone en tel endroit qu'on veut, selon qu'il est plus commode. C'est pourquoi lorsque la Section est une Parabole ou une Hyperbole, on la place ordinairement en sorte qu'elle coupe la Section; mais lorsque c'est une Ellipse on la place tantôt de maniére qu'elle la coupe, & tantôt de maniére qu'elle tombe audessous.

PROPOSITION III.

Theorême.

261. *Si dans le plan d'une Parabole* FAG, *l'on tire par un de*
FIG. CXXX. *ses points quelconques* A *vers le dedans du cone, une ligne droite indéfinie* AB *parallele au côté* SD *qui passe par le point où la Directrice* DE *touche la base; je dis que cette ligne* AB *tombe toute entiere au dedans de la Section, & qu'elle ne la rencontrera jamais quoique prolongée à l'infini du côté de* B.

Car ayant mené par le Sommet *S* du cone, & par la ligne *AB* un plan *SAB*, il formera par sa rencontre avec la Surface Conique deux côtés, dont l'un sera toujours la ligne *SD*, puisque *AB* lui est parallele; & l'autre la ligne *Sa* qui passe par le point *A*. Or le plan *DSa* renfermé entre les côtés *SD*, *Sa*,
* *Art.* 254. prolongés à l'infini du côté de *D* & *a*, tombe * au dedans de la Surface Conique. Par conséquent la ligne *AB* qui est toujours dans ce plan, étant parallele au côté *SD*, tombera toute entiere au dedans de la Parabole, & ne la rencontrera jamais quoique prolongée à l'infini vers *B*.

PROPOSITION IV.

Theorême.

262. *SI dans le plan d'une Parabole* FAG, *l'on tire par un de* FIG. CXXX.
ses points quelconques A *vers le dedans du cone, une ligne droite* AM *qui ne soit point parallele au côté* SD, *qui passe par le point* D *où la Directrice* DE *touche la base : je dis que cette ligne étant prolongée autant qu'il sera necessaire, rencontrera la Parabole en quelque autre point* M.

Car si l'on fait passer par le Sommet *S* du cone & par cette ligne un plan *SAM*, il est clair qu'il entre au dedans de la Surface Conique, & qu'il ne passe point par le côté *SD*; d'où il suit que ce plan forme sur la Surface Conique * deux côtés *Sa*, *Sm*; dont l'un *Sa* passe par le point *A*; & l'autre *Sm* n'est point parallele au plan de la Section, puisqu'il n'y a (*hyp*) que le seul côté *SD* qui lui soit parallele. Par conséquent le côté *Sm* étant prolongé (s'il est necessaire) rencontrera le plan de la Parabole en un point *M*, par où passe la ligne *AM* qui est formée par la rencontre du plan *aSm* avec celui de la Parabole. Or il est visible que ce point *M* est un des points de la Parabole *FAG*; puisqu'il se trouve en même temps dans le plan de la Section, & sur la Surface Conique. Donc &c.

* *Art.* 253.

PROPOSITION V.

Problême.

263. *MENER d'un point donné* A *sur une Section Conique, une Tangente* AF. FIG. CXXXIII. CXXXIV. CXXXV.

Ayant mené par le point *A* & par le Sommet *S* du cone, une ligne droite *SA* qui rencontre le plan de la base au point *a*; on tirera à cette base par le point *a* la Tangente *Eaf*; & la ligne *AF* formée par la rencontre du plan *SEaf* (prolongé, s'il est nécessaire, au de-là du Sommet *S*) avec le plan de la Section, sera la Tangente qu'on cherche.

Car puisque la Tangente *Eaf* tombe toute entiere au dehors de la base excepté le seul point *a*, il s'ensuit que le plan *SEaf* prolongé indéfiniment de part & d'autre du Sommet *S* ne rencontre les Surfaces Coniques opposées que dans la ligne

Sa aussi prolongée indéfiniment de part & d'autre du Sommet *S*, & que tout le reste de ce plan tombe au dehors de ces Surfaces. Par conséquent la ligne *AF* formée par la rencontre de ce plan avec celui de la Section, ne peut avoir de commun avec l'un ou l'autre de ces deux surfaces que le seul point *A* où la ligne *Sa* rencontre le plan de la Section, & tombe toute entiere au dehors excepté ce point. Donc &c.

COROLLAIRE I.

264. COMME l'on ne peut faire passer par le point *a* de la base du cone, qu'une seule Tangente *Eaf*; il s'ensuit aussi que d'un point donné *A* sur une Section Conique, on ne peut mener qu'une seule tangente *AF*.

COROLLAIRE II.

265. DE-LA on tire la maniere de mener une Tangente *AF* parallele à une ligne droite *MN* donnée de position sur le plan d'une Section Conique ou de deux Sections opposées. Car ayant mené par le Sommet *S* du cone, une parallele *SE* à *MN*, elle rencontrera la Directrice *DE* en un point *E*, ou bien elle lui sera parallele; puisque cette ligne *SE* sera parallele au plan de la Section, & tombera par consequent dans le plan *SDE*. Si elle la rencontre en un point *E* qui tombe au dehors du cercle qui est la base du Cone: ayant mené du point *E* à ce cercle, la Tangente *Eaf*, il est clair que le plan *SEaf* formera par sa rencontre avec le plan de la Section, une Tangente *AF* qui sera parallele à la ligne *MN*; puisque les deux Sections *AF*, *SE*, des plans * paralleles *MNASED*, coupés par le plan touchant *SEaf*, sont paralleles entr'elles aussi bien que * *SE*, *MN*.
* *Hyp.*

COROLLAIRE III.

266. LES mêmes choses étant posées que dans le Corollaire précédent.

FIG. CXXXIII. 1°. Dans la Parabole le Problême est impossible, lorsque la ligne *MN* donnée de position, devient parallele au côté *SD* qui passe par le point *D* où la Directrice *DE* touche la base; car alors le point *E* tombant en *D*, on ne pourra mener par ce point d'autre Tangente que la Directrice *DE*: & comme

me le plan qui passe par le Sommet & par la Directrice *DE* est * parallele au plan de la Parabole, il ne pourra former par sa rencontre avec ce plan aucune Tangente. Mais lorsque la ligne donnée de position, n'est point parallele au côté *SD*, on pourra toujours mener une Tangente *AF* parallele à cette ligne, & jamais davantage; car alors le point *E* tombant au dehors du cercle qui est la base du cone, on en pourra toujours mener *Eaf*, *EDL* à cette base; dont l'une *EDL* se confondant avec la Directrice, ne peut servir à trouver aucune Tangente dans le plan de la Section; & l'autre *Eaf* étant differente de la Directrice, servira toujours à trouver par la rencontre du plan *SEaf* avec le plan de la Parabole, une Tangente *AF* qui satisfera. Il en est de même lorsque la ligne *SE* est parallele à la Directrice, car la Tangente *Eaf* deviendra alors parallele à la Directrice; & comme on n'en peut mener qu'une seule qui lui soit parallele, puisque la Directrice touche elle-même la base en un point *D*, il s'ensuit &c. * Def. 9.

2°. Dans l'Ellipse on pourra toujours mener deux Tangentes *AF*, *BG*, paralleles à la ligne *MN* donnée de position; & par conséquent entr'elles. Car tous les points de la Directrice *DE* tombant au dehors de la base, on pourra toujours mener du point *E* deux Tangentes *Eaf*, *Ebg*, à cette base qui ne se confondront point avec la Directrice, & qui serviront à former par la rencontre des plans *SEaf*. *SEbg*, avec le plan de la Section, deux Tangentes *AF*, *BG*, qui satisferont. Il en est de même lorsque la ligne *SE* est parallele à la Directrice; car au lieu des Tangentes *Eaf*, *Ebf*, qui partent d'un point *E* de cette Directrice, il n'y auroit qu'à lui mener deux Tangentes paralleles; ce qui est toujours possible. FIG. CXXXIV.

3°. Dans les Hyperboles opposées le Problême est impossible, lorsque le point *E* tombe au dedans du cercle qui est la base du cone; puisqu'on ne peut mener alors aucune Tangente de ce point à la base. Mais lorsqu'il tombe au dehors, on pourra toujours trouver deux Tangentes *AF*, *BG*, paralleles à la ligne *MN* donnée de position; car la Directrice *DE* traversant la base, on pourra toujours mener du point *E* deux Tangentes *Eaf*, *Ebg*, à cette base, lesquelles tombent de part & d'autre de la Directrice, & qui serviront à former par la rencontre des plans *SEaf*, *SEbg*, avec le plan de la Section deux Tangentes *AF*, *BG*, qui satisferont. Il en est de même FIG. CXXXV.

lorsque la ligne *SE* est parallele à la Directrice *DE*; car au lieu des deux Tangentes *Eaf*, *Ebg*, il n'y aura qu'à mener deux Tangentes paralleles à la Directrice; ce qui est toujours possible.

Il est à remarquer dans ce dernier cas, que les Tangentes paralleles *AF*, *BG*, appartiennent toujours aux Hyperboles opposées, & jamais à la même; ce qui est évident, puisque les deux Tangentes *Eaf*, *Ebg*, de la base, tombent nécessairement de part & d'autre de la Directrice *DE*.

COROLLAIRE IV.

267. Il suit du Corollaire précédent:

1°. Que dans une Parabole ou Hyperbole, il ne peut y avoir deux Tangentes qui soient paralleles entr'elles; & qu'au contraire dans l'Ellipse & dans les Hyperboles opposées, une Tangente *AF*, étant donnée de position, on en peut toujours mener une autre *BG* qui lui soit parallele.

2°. Que si la ligne *MN* donnée de position, est terminée par une Section Conique, on pourra toujours mener dans la Parabole, une Tangente *AF* qui lui soit parallele, & dans l'Ellipse ou les Hyperboles opposées deux Tangentes *AF*, *BG*; puisque la ligne *SE* menée par le Sommet *S* parallelement à *MN* rencontrera * le plan de la base en un point *E* hors la circonference, ou bien lui sera parallele.

* *Art.* 256.

DE'FINITIONS.

12.

FIG. CXXXIII. Dans une Parabole, si l'on mene par un de ses points quelconques *A* vers le dedans une ligne *AB* parallele au côté *SD* qui passe par le point *D* où la Directrice *DE* touche la base: cette ligne *AB* sera nommée *Diametre*, & le point *A* en sera *l'origine*.

13.

FIG. CXXXIV. CXXXV. Dans l'Ellipse ou les Hyperboles opposées, toute ligne droite *AB*, qui joint les points d'attouchement de deux tangentes paralleles *AF*, *BG*, est appellée *Diametre*; & les points, *A*, *B*, en sont les extrêmités.

14.

FIG. CXXXIII. CXXXIV. CXXXV. Si par un point quelconque *P* de tel Diametre *AB* qu'on

voudra d'une Section Conique, l'on tire une ligne droite *MN* qui rencontre la Section aux points *M*, *N*, & qui soit parallele à la tangente *AF* qui passe par l'origine *A* de ce Diametre dans la Parabole, & par l'une ou l'autre de ses extrêmités dans les autres Sections : on dira que cette ligne *MN* est *Ordonnée* de part & d'autre au Diametre *AB*, & que chacune de ses parties *PM*, ou *PN*, est *Ordonnée* à ce Diametre.

15.

Lorsqu'un Diametre fait avec ses Ordonnées des angles droits, on l'appelle *Axe*.

COROLLAIRE.

268. Il suit de la Définition douziéme :

1°. Que tous les Diametres d'une Parabole sont paralleles entr'eux, puisqu'ils sont tous paralleles au même côté du cone *SD* qui passe par le point *D* où la Directrice *DE* touche la base.

2°. Que par un point donné sur le plan d'une Parabole, on ne peut mener qu'un seul Diametre, puisqu'on ne peut mener par ce point qu'une seule parallele au côté *SD*.

PROPOSITION VI.

Problême.

269. *Un diametre* AB *d'une Section Conique étant donné, avec une de ses ordonnées* PM; *décrire la Section.* Fig. CXXXVI. CXXXVII. CXXXVIII.

Ayant fait passer par l'ordonnée *PM* un plan quelconque autre que le plan *APM*, on menera dans ce plan par le point *P* une perpendiculaire indéfinie *Pa* à *PM*; & on décrira d'un point quelconque *C* de cette ligne, & du rayon *CM* un cercle. Cela fait.

1°. Lorsque la Section doit être une Parabole. On menera de l'un des points *a*, *D*, où le cercle coupe la perpendiculaire *Pa* (par exemple du point *a*) par l'origine *A* du diametre *AB*, la ligne *aA* qui rencontre en *S*, une ligne *DS* tirée de l'autre point *D* parallelement à *AB*. On décrira ensuite une surface Conique qui ait pour sommet le point *S*, & pour base le cercle *DMaN*. Je dis qu'elle formera par sa rencontre Fig. CXXXVI.

avec le plan APM, la Parabole cherchée MAN. Car ayant mené par les extremités du diametre Da les paralleles DE, af, à PM; il est clair qu'elles seront tangentes, puisque * PM est perpendiculaire sur Da. Or le plan SDE qui passe par le sommet S du cone & par la tangente DE, est parallele au plan APM, puisque * SD est parallele à AP, & DE à PM, d'où il suit * que la Section MAN faite par le plan APM dans la surface Conique, sera une Parabole qui aura pour diametre la ligne AB. De plus le plan touchant Saf forme dans le plan APM * une tangente AF, qui sera parallele à PM; puisqu'elle est la commune Section des deux plans Saf, APM, qui passent par les paralleles af, PM; & par conséquent * la ligne PM sera ordonnée au diametre AB.

* Hyp. * Hyp. * Def. 10. & 12. * Art. 263. * Def. 14.

F. CXXXVII. CXXXVIII. 2°. Lorsque la Section Conique doit être une Ellipse ou une Hyperbole. On menera des points a b, où la perpendiculaire indéfinie Pa coupe le cercle, par les extremités A, B, du diametre AB, les droites aA, bB; qui se rencontrent au point S. On décrira ensuite un cone qui ait pour sommet le point S, & pour base le cercle $aMbN$. Je dis que le plan APM formera dans la surface de ce cone la Section MAN qu'on demande. Car menant SD parallele au diametre AB de la Section, & qui rencontre en D le diametre ab de la base, par où & par les extremités a, b, soient tirées les paralleles, DE, af, bg, à PM; il est clair que le plan SDE sera parallele au plan APM, & qu'ainsi DE * sera la Directrice. Or dans l'Ellipse le point D tombe sur le diametre ab prolongé hors le cercle; puisque le diametre AB de la Section, tombe dans l'angle aSb fait par les côtés du cone Sa, Sb: & au contraire dans l'Hyperbole le point D tombe au dedans du cercle; puisqu'alors le diametre AB tombe dans l'angle aSB qui est à côté de l'angle aSb. D'où il suit selon la Définition 10. que la Section MAN est une Ellipse dans le premier cas, & une Hyperbole dans le second. De plus la tangente AF qui passe par l'extremité A du diametre AB, étant la commune Section du plan touchant Saf & du plan coupant APM, qui passent par les paralleles af, PM, sera parallele à PM: & de même la tangente BG étant la commune Section du plan touchant Sbg & du plan coupant APM, lesquels passent par les deux paralleles bg, PM, sera aussi parallele à PM. D'où l'on voit que la ligne AB est * un diametre qui a pour ordonnée PM.

* Def. 9.

Il peut arriver dans l'Ellipse que les lignes *Aa*, *Bb*, soient paralleles entr'elles; mais alors il n'y aura qu'à prendre pour le centre *C* du cercle *aMbN*, tel autre point qu'on voudra de la ligne *Ab*.

DE'FINITION.

16.

Si par les deux points D, *E*, où la Directrice coupe la base, lorsque la Section est une Hyperbole, on tire deux Tangentes *DH*, *EK*; & que par le Sommet *S* & ces Tangentes, on fasse passer deux plans *SDH*, *SEK*: les deux lignes droites indéfinies *CH*, *CK*, que ces deux plans forment par leurs rencontres avec le plan des Hyperboles, sont appellées *Asymptotes*. FIG.CXXXIX.

COROLLAIRE.

270. Si par un point d'attouchement D, l'on mene le côté *DS* prolongé indéfiniment de part & d'autre du Sommet *S*: il est visible que le plan *SDH* ne peut avoir de commun avec les deux surfaces Coniques opposées que ce côté; puisque tous les points de la Tangente *DH* tombent hors la circonference de la base, excepté le seul point D. Or le plan *SDE* qui passe par le Sommet *S* & par la Directrice *DE*, étant * parallele au plan des Hyperboles opposées, les communes Sections *SD*, *CH*, de ces deux plans avec le même plan *SDH* seront paralleles entr'elles; c'est pourquoi l'Asymptote *CH* tombera toute entiere au dehors & entre les deux surfaces Coniques opposées, & laissera par conséquent les Hyperboles opposées toutes entieres de part & d'autre sans les rencontrer. On prouvera la même chose de l'autre Asymptote *CK*. Or comme les deux Asymptotes *CH*, *CK*, sont formées par les plans *SDH*, *SEK*, qui tombent de part & d'autre de la même surface Conique & de son opposée; il s'ensuit que tous les points de l'Hyperbole *FAG* sont compris dans l'angle *HCK*, & que tous les points de son opposée tombent dans l'angle qui lui est opposé au Sommet.

* *Def. 9.*

PROPOSITION VII.

Theorême.

271. *SI par un point quelconque* B *d'une Asymptote* CK, *l'on*
[illegible] *mene une parallele* BA *à l'autre Asymptote* CH; *je dis qu'el-*
FIG: CXXIII *le rencontrera l'une des Hyperboles opposées en un seul point* A, *& qu'étant prolongée indéfiniment, elle tombera toute entiere au dedans.*

Puisque les deux lignes *BA*, *SD*, sont paralleles à la même ligne *CH*, elles le seront entr'elles; & ainsi elles se trouveront dans un même plan, lequel entrera au dedans des deux surfaces Coniques opposées, puisqu'il passe par l'un de leurs côtés *SD*, & qu'il fait un angle avec le plan *SDH* qui la touche dans ce côté. Le plan des paralleles *BA*, *SD*, formera donc dans les deux surfaces Coniques, deux côtés, dont l'un est le côté *SD*, & l'autre le côté *Sa*, qui coupera nécessairement la ligne *BA* en quelque point *A*, puisqu'il est situé dans le plan qui passe par les paralleles *SD*, *AB*, & qu'il coupe *SD* en *S*. Donc puisque le point *A* se trouve en même temps dans l'une des surfaces Coniques & dans le plan des Hyperboles, il appartiendra à l'une de ces Hyperboles. De plus puisque la ligne *BA* étant prolongée indéfiniment du côté du point *A*, tombe toute entiere dans le plan *DSa* renfermé entre les côtez *DS*, *Sa*, lorsque le point *A* appartient à l'Hyperbole *FAG*, & dans son opposé au Sommet *ASd* lorsqu'il appartient à l'Hyperbole opposée; il est visible qu'elle tombera toute entiere au dedans de l'une des deux surfaces Coniques, & par conséquent aussi au dedans de l'Hyperbole qui en est la Section. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

272. DE-LA on voit qu'entre une Hyperbole *FAG* & son Asymptote *CH*, on ne sçauroit faire passer aucune ligne parallele à cette Asymptote. Or comme la ligne *BA* separe l'Hyperbole qu'elle rencontre en deux portions indéfinies, dont l'une tombe nécessairement toute entiere dans l'espace compris entre les paralleles *BA*, *CH*; il s'ensuit que plus *CB* deviendra petite, plus le point *A* avancera dans cette portion, & cela toujours de plus en plus jusqu'à ce que *CB* devienne

plus petite qu'aucune grandeur donnée. C'est à dire, qu'une Hyperbole & son Asymptote étant l'une & l'autre continuée indéfiniment, elles s'approcheront toujours de plus en plus, en sorte que leur distance deviendra enfin moindre qu'aucune donnée, sans pouvoir néanmoins * jamais se rencontrer. *Art. 270.

PROPOSITION VIII.

Problême.

273. *LES Asymptotes* CH, CK, *d'une Hyperbole* FAG *étant données avec un de ses points quelconques* F, *décrire l'Hyperbole.*

Ayant mené par le point donné *F*, une ligne droite quelconque *HK* terminée par les asymptotes, on fera passer par cette ligne un plan quelconque autre que le plan *HCK*, dans lequel on tirera par le point de milieu *P* de *HK* une perpendiculaire indéfinie *MN* à cette ligne; & on décrira d'un de ses points quelconques *O* comme centre, & du rayon *OF*, un cercle *FMN*. On menera des points *H*, *K*, deux Tangentes *HD*, *KE*, à ce cercle; & par les points d'attouchemens *D*, *E*, deux paralleles *DS*, *ES*, aux Asymptotes *CH*, *CK*, lesquelles se rencontreront en un point *S*; duquel comme Sommet, on décrira une surface Conique qui ait pour base le cercle *FMN*. Je dis que cette surface Conique formera par sa rencontre avec le plan *HCK*, l'Hyperbole requise *FAG*. FIG. CXL.

Il est clair par la proprieté du cercle *FMN*; 1°. Que la corde FG est divisée par le milieu au point *P*, par le diametre *MN* qui lui est * perpendiculaire; & partant, puisque par la construction $PH = PK$, il s'ensuit que $FH = GK$, $GH = FK$; & par conséquent $GH \times HF = FK \times KG$. 2°. Que $GH \times HF = \overline{HD}^2$, & $FK \times KG = \overline{KE}^2$, & qu'ainsi $HD = KE$. 3°. Que si l'on prolonge les Tangentes *HD*, *KE*, jusqu'à ce qu'elles se rencontrent en un point *Q*, les parties *DQ*, *EQ*, seront égales entr'elles. Ce qui donne $DQ . EQ :: DH . EK$. D'où l'on voit que la ligne *DE* qui joint les points d'attouchemens des deux Tangentes *HD*, *KE*, sera parallele à la ligne *HK*, & le plan *SDE* au plan *CHK*: c'est pourquoi la ligne *DE* sera * la Directrice; & *Hyp. *Def. 9.

comme elle coupe la baſe en deux points, la Sèction Conique *FAG* * ſera une Hyperbole. De plus il eſt évident que cette Hyperbole paſſera par le point donné *F*, puiſque ce point eſt commun tant à la ſurface Conique, qu'au plan *HCK* qui eſt celui de l'Hyperbole ; & qu'elle aura pour aſymptotes les lignes *CH*, *CK*, puiſqu'elles ſont * les communes Sections des plans touchans *SDH*, *SEK*, & du plan de l'Hyperbole.

* Def. 10.

* Def. 15.

S'il arrivoit que les Tangentes *DH*, *EK*, fuſſent paralleles entr'elles, on verroit alors tout d'un coup que les lignes *DE*, *HK*, ſeroient paralleles entr'elles, puiſque ces Tangentes ſont égales; & le reſte ſe démontreroit de la même maniere que ci-deſſus.

PROPOSITION IX.

Theorême.

274. FIG. CXLI. CXLII. *S'IL y a deux lignes droites* MN, AB, *terminées par une Section Conique ou par les Sections oppoſées, leſquelles ſe rencontrent en un point* P; *& qui ſoient paralleles à deux autres lignes*, SE, SD, *données de poſition : je dis que le rectangle* MP × PN *eſt au rectangle* AP × PB, *en raiſon donnée ; c'eſt à dire que la raiſon de ces deux rectangles demeure toujours la même, en quelque endroit que puiſſent tomber les deux lignes* MN, AB.

Ayant mené par les paralleles *SE*, *MN*, & *SD*, *AB*, deux plans, ils formeront dans le plan de la baſe, deux lignes droites *Enm*, *Dba*, & dans la ſurface Conique les côtés *SMm*, *SNn*, *SAa*, *SBb*; & leur commune interſection ſera la ligne *SPp*, qui rencontre le plan de la baſe au point *p*, où les deux droites *Em*, *Da*, s'entrecoupent; par lequel je mene dans le plan *SMN* la droite *HK* parallele à *MN*, & dans le plan *SAB* la droite *FG* parallele à *AB*. Cela poſé.

Les triangles ſemblables *SPM*, *SpH* ; *SPN*, *SpK* : *SPA*, *SpF* ; *SPB*, *SpG*, donnent $MP \times PN . Hp \times pK :: \overline{SP}^2 . \overline{Sp}^2 :: AP \times PB . Fp \times pG$. Et partant on aura $MP \times PN . AP \times PB :: Hp \times pK . Fp \times pG$. Or la raiſon de $Hp \times pK$ à $Fp \times pG$, eſt compoſée des deux raiſons de $Hp \times pK$ à $mp \times pn$, & de

& de $mp \times pn$ ou par la proprieté du cercle $ap \times pb$ à $Fp \times pG$. Mais à cause des triangles semblables Hpm, SEm, & Kpn, SEn, il vient $Hp . mp :: SE . mE$. Et $pK . pn :: SE . En$. Et en multipliant les Antecedens & les Conséquens de ces deux raisons, $Hp \times pK . mp \times pn :: \overline{SE}^2 . mE \times En$: on prouvera de même à cause des triangles semblables Fpa, SDa, & Gpb, SDb, que $ap \times pb . Fp \times pG :: aD \times Db . \overline{SD}^2$. Il est donc évident que la raison de $MP \times PN$ à $AP \times PB$, est composée des deux raisons de $\overline{SE}^2$ à $mE \times En$, & de $aD \times Db$ à $\overline{SD}^2$; lesquelles par la proprieté du cercle qui est la base du cone, demeurent toujours les mêmes en quelque endroit que tombent les droites MN, AB, parce que les points E, D, ne changent point. Donc le rectangle $MP \times PN$ est au rectangle $AP \times PB$ en raison donnée. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

275. DE-LA on voit que si dans une Section Conique, où entre les Sections opposées, il y a deux lignes droites MN, OR, paralleles entr'elles & qui rencontrent aux poinrs P, Q, une troisiéme ligne droite AB aussi terminée par la Section ; on aura $MP \times PN . OQ \times QR :: AP \times PB . AQ \times QB$. Fig CXLIII. CXLIV.

PROPOSITION X.

Theorême.

276. *SI par un point quelconque* A *d'une Parabole ou d'une Hyperbole* MAN, *l'on tire une ligne droite* AB *parallele au côté du cone* SD, *mené dans la Parabole par le point* D *où la Directrice touche la base, & dans l'Hyperbole par l'un des deux points où elle la rencontre ; & que par un point quelconque* P *de cette ligne, l'on tire une ligne* MN *parallele à une ligne* SE *donnée de position, & terminée par la Section ou par les Sections opposées, avec une autre ligne* FG *parallele à la ligne* Da *commune Section du plan* SAB Fig. CXLV.

avec celui de la base, & terminée par les côtés Sa, SD: *je dis que la raison du rectangle* MP × PN *au rectangle* FP × PG *est donnée, c'est à dire qu'elle demeure toujours la même, en quelque endroit de la ligne* AB *que tombe le point* P.

Ayant mené par les paralleles, *SE*, *MN*, un plan: il formera dans celui de la base une ligne droite *Enm*; dans la surface Conique les côtés *SMm*, *SNn*; & dans le plan *SDa* la ligne *SPp* qui rencontre la base au point *p*, où les lignes *Em*, *Da*, s'entrecoupent, par lequel je mene dans le plan *SMN* la ligne *HK* parallele à *MN*. Cela posé, les triangles semblables *SPM*, *SpH*; *SPN*, *SpK*; *SPF*, *Spa*; *SPG*, *SpD* donneront $MP \times PN . Hp \times pK :: \overline{SP}^2 . \overline{Sp}^2 . :: FP \times PG . ap \times pD$, ou par la proprieté du cercle $mp \times pn$. Et partant on aura $MP \times PN . FP \times PG :: Hp \times pK . mp \times pn$. Mais la raison de $Hp \times pK$ à $mp \times pn$, est composée de deux raisons de *Hp* à *pm*, & de *pK* à *pn*, c'est à dire, à cause des triangles semblables *Hpm*, *SEm*, & *Kpn*, *SEn*, des deux raisons de *SE* à *Em*, & de *SE* à *En*; & par conséquent $Hp \times pK . mp \times pn$, ou $MP \times PN . FP \times PG :: \overline{SE}^2 . mE \times En$. Donc puisque le point *E* ne change point en quelque endroit que l'on prenne le point *P*, & que tous les rectangles $Em \times En$ sont égaux par la proprieté du cercle; il s'ensuit que $MP \times PN$ est à $FP \times PG$ en raison donnée. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

277. Fig. CXLVIII. DE-LA il est évident que si par un point quelconque *A* d'une Parabole ou d'une Hyperbole *MAN*, l'on mene dans la Parabole un diametre *AB*, & dans l'Hyperbole une parallele *AB* à l'une de ses Asymptotes; & que par deux points quelconques *P*, *Q*, de la ligne *AB*, l'on tire deux paralleles *MN*, *OR*, terminées par la Section ou par les Sections opposées, on aura $MP \times PN . OQ \times QR :: AP . AQ$.

Car menant le plan *SAB* qui forme par sa rencontre avec la surface Conique les côtés *SD*, *Sa*, entre lesquels le côté *SD* passera par le point où la Directrice touche la base lorsque la Section est une Parabole, & par l'un des deux points où la Directrice la rencontre lorsque c'est une Hyperbole; &

tirant dans le plan SDa par les points P, Q, les droites FC, TV, paralleles à Da : il est clair par la Proposition précédente que $MP \times PN \,.\, FP \times PG :: OQ \times QR \,.\, TQ \times QV$. Et qu'ainsi $MP \times PN \,.\, OQ \times QR :: FP \times PG \,.\, TQ \times QV$. Or les parties PG, QV, des lignes FG, TV, sont égales entr'elles; puisque les lignes AB, SD, sont paralleles. Et partant $MP \times PN \,.\, OQ \times QR :: FP \,.\, TQ :: AP \,.\, AQ$. à cause des triangles semblables APF, AQT. Donc &c.

CHAPITRE II.

De l'Ellipse en particulier.

DÉFINITIONS.

17.

Si une ligne droite indéfinie SZ qui est hors le plan d'un cercle VXY, se meut par un de ses points X autour de la circonference de ce cercle toujours parallelement à elle même, jusqu'à ce qu'elle soit revenuë au même point d'où elle étoit partie : la surface convexe décrite par cette ligne SZ dans ce mouvement, est appellée *Surface cylindrique*. FIG. CXLVII.

18.

Cette ligne SZ en chaque differente position, en est toujours appellée le *Côté*.

19.

Le cercle VXY, la *Base*.

20.

La droite indéfinie CO menée du centre C de la base parallelement aux côtés, en est l'*Axe*.

21.

Le solide indéfini compris par la base VXY & par la Surface cylindrique, est appellé *Cylindre*.

22.

Si l'on coupe un Cylindre par un plan qui ne soit point parallele à ses côtés, ni au plan de sa base; la ligne courbe $AMBN$ formée par la rencontre de ce plan avec la Surface cylindrique, est appellé *Section cylindrique*.

PROPOSITION XI.

Problême.

278. FIG. CXLVII. *SI l'on coupe un cylindre par un plan* uxy *parallele au plan de la base* VXY; *la Section* vxy *sera un cercle qui aura pour centre le point* c *où ce plan rencontre l'axe*, *& pour rayon une ligne* cx *égale au rayon* CX *de la base*.

Car menant par un point quelconque *x* de la Section *vxy* un côté *xX* de la Surface cylindrique, il sera parallele * à l'axe *Cc*: c'est pourquoi on pourra faire passer un plan par ces deux lignes, qui formera par sa rencontre avec les deux plans paralleles *CVXY*, *cvxy*, deux droites *CX*, *cx*, paralleles entr'elles; & qui seront de plus égales, puisqu'elles sont renfermées entre les paralleles *Cc*, *Xx*. Or comme cela arrive toujours en quelque endroit de la Section *vxy* qu'on prenne le point *x*, il s'ensuit que toutes les lignes *cx* menées du point *c*, aux points *x* de la Section *vxy*, sont égales aux rayons *CX* de la base: c'est à dire que la Section *vxy* sera la circonference d'un cercle, qui aura pour centre le point *c*, où le plan *vxy* rencontre l'axe du cylindre, & pour rayon une ligne *cx* égale au rayon *CX* de la base. *Ce qu'il falloit démontrer*.

* Def. 20.

PROPOSITION XII.

Theorême.

279. FIG. CXLVIII. *TOUTE Ellipse peut être regardée comme une Section cylindrique.*

Ayant mené dans la base du cone où est produite une Ellipse quelconque, le diametre *ab* qui rencontre à angles droits au point *D*, la Directrice *DE*, soient tirés sur la surface Conique les côtés *Sa*, *Sb*, qui rencontrent le plan de l'Ellipse aux points *A*, *B*; & dans les plans paralleles *AMB*, *SDE*, les droites *AB*, *SD*. Ayant pris *DF* moyenne proportionnelle entre *aD*, *Db*, & mené à *SF* les paralleles *AG*, *BH*, soit décrit sur le plan de la base du cone, un cercle qui ait pour diametre la ligne *GH*, & une surface cylindrique qui ait pour base ce cercle, & pour côtés les droites *AG*, *BH*. Cela posé.

Je dis que si par un point quelconque P de la ligne AB, l'on tire à la Directrice DE, une parallele qui rencontre la surface Conique en M, & la Cylindrique en O; les points M, O, se confondront l'un avec l'autre & n'en feront qu'un seul.

Car ayant fait passer par cette parallele un plan parallele au plan des deux bases tant du cone que du cylindre, il formera sur la surface Conique * un cercle KML dont le centre sera la commune Section de ce plan avec l'axe du cone, & sur la surface Cylindrique * un autre cercle QMR dont le centre sera la commune Section de ce même plan avec l'axe du cylindre. Or le plan Sab passe * par l'axe du cone, & le plan $AGHB$ (qui ne fait qu'un seul plan avec celui du triangle Sab) par l'axe * du cylindre; & par consequent les lignes KL, QR, communes Sections de ces deux plans, avec le plan parallele (à la base) qui passe par la ligne POM, seront les diametres de ces deux cercles; & cette ligne POM sera perpendiculaire à ces diametres, puisqu'elle est * parallele à DE qui est * perpendiculaire à ab & à GH qui ne font * qu'une même ligne, à laquelle les diametres KL & QR qui ne font aussi qu'une même ligne, sont paralleles. De plus les lignes AB, SD, étant formées par les rencontres du même plan Sba avec deux plans paralleles entr'eux; sçavoir, le plan SDE & celui de l'Ellipse, seront aussi paralleles entr'elles. Ceci bien entendu.

* Art. 259.
* Art. 278.
* Def. 9.
* Def. 20.
* Hyp.
* Hyp.
* Hyp.

1°. Dans le cone, à cause du cercle KML, on aura $\overline{PM}^2 = KP \times PL$; & à cause des triangles semblables APK, SDa, & PBL, SDb, il vient $AP . KP :: SD . aD$. Et $PB . PL :: SD . Db$. D'où il suit que $AP \times PB . KP \times PL$ ou $\overline{PM}^2 :: \overline{SD}^2 . aD \times Db$.

2°. Dans le cylindre, à cause du cercle QOR, on aura $\overline{PO}^2 = QP \times PR$; & à cause des triangles semblables APQ, SDF, & PBR, SDF, on formera ces deux proportions $AP . QP :: SD . DF$. Et $PB . PR :: SD . DF$. D'où il suit que $AP \times PB . QP \times PR$ où $\overline{PO}^2 :: \overline{SD}^2 . \overline{DF}^2$ ou $aD \times Db$. Donc $\overline{PM}^2 = \overline{PO}^2$, & $PM = PO$. Donc les points M, O, se confondent l'un avec l'autre, & n'en font qu'un seul. Donc,

puisque cela arrive toujours en quelque endroit de la ligne *AB* que l'on prenne le point *P*, il s'ensuit que le plan de l'Ellipse rencontre les surfaces Coniques & Cylindriques dans les mêmes points, & qu'ainsi toute Ellipse peut toujours être regardée comme une Section cylindrique.

AVERTISSEMENT.

Comme un Cylindre est moins composé qu'un cone, en ce que tous ses côtés sont paralleles entr'eux; au lieu que dans le cone ils aboutissent tous au même point qui en est le sommet; on a pris le parti de regarder dans ce Chapitre, l'Ellipse comme la Section d'un cylindre. Ce qui fait qu'on peut démontrer tout à la fois les proprietés de tous ses diametres; & que se servant ensuite dans le cone (comme l'on verra dans le Chapitre suivant) de plans Elliptiques au lieu de circulaires, on prouvera les mêmes choses dans la Parabole & Hyperbole avec une extrême facilité.

PROPOSITION XIII.

Theorême.

280. *TOUS les diametres d'une Ellipse passent par un seul & unique point, qui est celui où le plan de l'Ellipse rencontre* FIG. CXLIX. *l'axe du cylindre; & y sont coupés en deux parties égales.*

Et réciproquement toutes les lignes qui passent par ce point, & qui sont terminées de part & d'autre par l'Ellipse; y sont coupées en deux également, & en sont des diametres.

On nomme ce point le *Centre* de l'Ellipse.

1°. Soit *AB* un diametre quelconque, & *C* le point où le plan de l'Ellipse rencontre l'axe du cylindre. Si l'on mene les
*Def. 20. lignes *Aa*, *Bb*, paralleles à l'axe *Cc*, il est clair * qu'elles seront des côtés de la surface cylindrique, & que les deux plans *FAa*, *GBb*, qui passent par ces deux lignes, & par les deux tangentes *AF*, *BG*, qui selon la définition des diametres, doivent être paralleles entr'elles, seront paralleles entr'eux, & toucheront la surface cylindrique dans les côtés *Aa*, *Bb*; d'où il suit que ces deux plans formeront dans le plan de la base deux lignes *af*, *bg*, paralleles entr'elles, & qui toucheront la base aux points *a*, *b*, où les côtés *Aa*, *Bb*,

la rencontrent. Or il eſt démontré dans les Elemens de Geometrie, que la ligne *ab* qui joint les points d'attouchement de deux tangentes paralleles *af*, *bg*, d'un cercle, paſſe par ſon centre *c*. Partant le plan *AabB* paſſera par l'axe *Cc* du cylindre; & la ligne *AB*, qui eſt la rencontre de ce plan avec celui de l'Ellipſe, paſſera par le point *C* où cet axe rencontre le plan de l'Ellipſe. De plus à cauſe des paralleles *Aa*, *Bb*, *Cc*; il eſt évident que le diametre *AB* de l'Ellipſe, eſt diviſé en deux également au point *C*; puiſque le diametre *ab* du cercle l'eſt au point *c* qui en eſt le centre. *Ce qu'il falloit démontrer en premier lieu.*

2°. Si l'on mene par les extremités *A*, *B*, d'une ligne quelconque *AB*, qui paſſe par le point *C* où le plan de l'Ellipſe rencontre l'axe *Cc* du cylindre, les lignes *Aa*, *Bb*, paralleles à cet axe; il eſt clair ſelon la définition 17. de la ſurface cylindrique, qu'elles en ſeront des côtés, & que le plan *AabB* paſſera par l'axe *Cc* du cylindre. D'où l'on voit que la ligne *ab* commune Section de ce plan & de celui de la baſe, paſſe par le centre *c* de la baſe; & qu'ainſi, puiſqu'elle y eſt coupée en deux également, la ligne *AB* la ſera auſſi au point *C*. De plus les tangentes *af*, *bg*, qui paſſent par les extremités du diametre *ab* étant paralleles entr'elles; les plans touchans *faA*, *gbB*, ſeront paralleles entr'eux, & formeront dans le plan de l'Ellipſe deux lignes paralleles *AF*, *BG*, qui la toucheront aux extremités *A*, *B*, de la ligne *AB*, qui en ſera par conſéquent un diametre. *C'eſt ce qu'il falloit démontrer en ſecond lieu.*

COROLLAIRE.

281. DE-LA il eſt évident que par un point donné ſur le plan d'une Ellipſe autre que le centre, on ne peut faire paſſer qu'un ſeul diametre.

PROPOSITION XIV.

Theorême.

282. *TOUTE ordonnée* MPN *de part & d'autre à un diametre* AB, *eſt coupée en deux également par ce diametre en un point* P. FIG. CXLIX.

Et réciproquement si une ligne quelconque MPN *terminée par une Ellipse & qui ne passe point par le centre* C, *est coupée en deux également en* P, *par un diametre* AB; *elle sera ordonnée de part & d'autre à ce diametre.*

Ayant mené par les points A, B, M, N, les côtés Aa, Bb, Mm, Nn, paralleles à l'axe Cc du cylindre, & qui rencontrent le plan de la base aux points a, b, m, n; la ligne Pp commune Section des deux plans $AabB$, $MmnN$, sera parallele aux côtés du cylindre, puisque tous les côtés sont paralleles entr'eux. De plus le plan $AabB$ passera par l'axe Cc du cylindre, puisque le diametre AB passe par le point C où cet axe rencontre le plan de l'Ellipse; & il formera par conséquent dans le plan de la base une ligne ab qui passera par le centre c, c'est à dire, un diametre. Cela posé.

Puisque par la supposition la ligne MPN est ordonnée de part & d'autre au diametre AB, elle sera parallele aux tangentes AF, BG, qui passent par les extremités de ce diametre; & par conséquent les plans touchans FAa, GBb, seront paralleles au plan $MmnN$. Les lignes que ces trois plans forment dans le plan de la base; sçavoir les deux tangentes af, bg, & la ligne mn, seront donc paralleles entr'elles; & ainsi la ligne mn sera perpendiculaire au diametre ab, qui la divisera par conséquent en deux parties égales au point p. D'où il suit à cause des paralleles Mm, Pp, Nn, que la ligne MN sera aussi divisée en deux parties égales au point P.

Maintenant pour prouver la converse, on menera dans
* Art. 267. le plan de l'Ellipse deux tangentes AF, BG, * paralleles à MN; & ayant tiré par leurs points d'attouchemens le diametre AB, il est clair selon les définitions 13. & 14. que cette ligne MN sera ordonnée de part & d'autre à ce diametre, & par conséquent (selon ce qu'on vient de démontrer) coupée en deux également en P par ce même diametre. Or
* Art. 281. comme l'on ne peut mener par le point P * qu'un seul diametre, il s'ensuit que si une ligne MN terminée par une Ellipse, & qui ne passe point par le centre C, est coupée en deux également en P par un diametre AB, elle lui sera ordonnée de part & d'autre.

PROP.

PROPOSITION XV.

Theorême.

283. *S'IL y a dans une Ellipse deux diametres* AB, DE; *dont l'un d'eux* DE *soit parallele aux Tangentes* AF, BG, *qui passent par les extremités de l'autre* AB: *je dis réciproquement que le diametre* AB *sera parallele aux Tangentes qui passent par les extremités du diametre* DE. Fig. CXLIX.

Les deux diametres *AB*, *DE*, sont appellés *Conjugués* l'un à l'autre.

Ayant mené par les points *A*, *B*, *D*, *E*, les côtés *Aa*, *Bb*, *Dd*, *Ee*, du cylindre, lesquels rencontrent le plan de la base aux points *a*, *b*, *d*, *e*; les plans *AabB*, *DdeE*, passeront par l'axe *Cc* du cylindre, puisque les lignes *AB*, *DE*, sont des diametres de l'Ellipse; & formeront par conséquent dans le plan de la base, deux diametres *ab*, *de*. Or le plan touchant *FAa* étant parallele au plan *DdeE*, formera dans le plan de la base une Tangente *af* parallele au diametre *de*, lequel diametre sera par conséquent perpendiculaire sur le diametre *ab*. Si donc l'on mene par l'une des extremités *d* du diametre *de* une Tangente *db* au cercle, elle sera parallele au diametre *ab*, & le plan *hbD* parallele au plan *AabB*: c'est pourquoi les communes Sections de ces deux plans avec le plan de l'Ellipse, sçavoir la Tangente *DH* & le diametre *AB*, sont paralleles entr'elles. On prouvera la même chose à l'égard de la Tangente qui passe par l'autre extremité *E* du diametre *DE*. Donc &c.

COROLLAIRE I.

284. DE-LA il est évident que s'il y a deux diametres conjugués *AB*, *DE*, dans une Ellipse; les deux plans qui passent par ces diametres & par l'axe *Cc* du cylindre, formeront dans le plan de la base deux diametres *ab*, *de*, qui seront perpendiculaires entr'eux: ce qui est réciproque.

COROLLAIRE II.

285. IL suit encore de cette Proposition que si par un point quelconque *P* d'un diametre *AB*, on mene une ordonnée *MPN*

de part & d'autre, elle sera parallele au diametre DE qui
*Art. 275. lui est conjugué; & qu'ainsi on aura * $\overline{PM} \times \overline{PN}$ ou $\overline{PM}^2 . DC \times CE$ ou $\overline{DC}^2 :: AP \times PB . AC \times CB$ ou $\overline{AC}^2$. Ce qui donne $\overline{PM}^2 . AP \times PB :: \overline{DC}^2 . \overline{AC}^2 :: 4\overline{DC}^2$ ou $\overline{DE}^2 . 4\overline{AC}^2$ ou $\overline{AB}^2$. C'est à dire que le quarré d'une ordonnée quelconque MP à un diametre AB, est au rectangle $AP \times PB$ fait des parties de ce diametre, comme le quarré du diametre DE qui lui est conjugué, est au quarré du diametre AB.

PROPOSITION XVI.

Theorême.

286. FIG. CL. *Si par un point quelconque* M *d'une Ellipse* AMB, *l'on mene une Tangente* FMG *qui rencontre aux points* F, G, *deux autres Tangentes* AF, BG, *paralleles entr'elles : je dis que* FM. MG :: AF. BG.

Ayant mené par les points d'attouchemens A, B, M, les côtés Aa, Bb, Mm, du cylindre, & fait passer par ces côtés & par les Tangentes AF, BG, FG, les trois plans FAa, GBb, EMm, ou GMm; il est clair que les communes Sections Ff, Gg, des deux premiers plans avec le troisiéme, seront paralleles tant entr'elles, qu'avec les côtés du cylindre; car les deux plans FMm, FAa, passant par les côtés Mm, Aa, qui sont paralleles entr'eux, leur commune Section Ff sera parallele à ces côtés; & par la même raison Gg commune Section des deux plans GBb, GMm, sera parallele aux côtés Bb, Mm. De plus les lignes af, bg, que forment les plans touchans paralleles FAa, GBb, dans le plan de la base, en seront des Tangentes paralleles; les parties fm, mg, de la troisiéme Tangente formée dans le plan de la base par le troisiéme plan touchant FMm, ou GMm, seront égales (par la proprieté du cercle) aux Tangentes af, bg; sçavoir, fm à fa, & mg à gb. Cela posé.

A cause des lignes Aa, Ff, Mm, Gg, Bb; & AF, BG; & af, bg, qui sont paralleles entr'elles, on aura $FM . MG ::$ fm ou $fa . mg$ ou $gb :: FA . GB$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

287. Si l'on mene par les points d'attouchement A, B, des deux Tangentes paralleles entr'elles AF, BG, un diametre AB qui rencontre en T la Tangente FMG, & qu'on tire l'ordonnée MP à ce diametre : il eſt évident que $AP . PB :: FM . MG :: AF \; BG :: AT . BT$. Et qu'ainſi $PB - AP . PB :: BT - AT$ ou $AB . BT$.

COROLLAIRE II.

288. De-la on tire la maniére ſuivante de mener d'un point donné M ſur une Ellipſe la Tangente MT, un diametre AB étant donné avec la poſition de ſes ordonnées.

De l'une des extremités B du diametre AB, ſoit tirée au point donné M la droite BM. Puis ayant mené l'ordonnée MP au diametre AB, & pris ſur ce diametre du côté de B la partie PH égale à PA, ſoit tirée HK parallele à PM, rencontrant la ligne BM en K, par où & par l'autre extremité A ſoit menée AK Soit enfin tirée MT parallele à AK, elle ſera la Tangente qu'on cherche.

Car à cauſe des paralleles MP, HK, & AK, MT, l'on aura $BP . PH$. ou $PA :: BM . MK :: BT . TA$.

COROLLAIRE III.

289. S'il y a dans une Ellipſe deux Tangentes MT, NT, qui ſe rencontrent en un point T ; je dis que le diametre AB qui paſſe par le point P milieu de la ligne MN qui joint les deux points d'attouchement, paſſera auſſi par le point T. Car PN eſt ordonnée au diametre AB de même que PM ; & par conſéquent * les Tangentes MT, NT, iront chacune rencontrer ce diametre en un point T, tel que $PB - AP . PB :: AB . BT$; c'eſt à dire dans le même point. * *Art.* 287.

COROLLAIRE IV.

290. Si l'on joint dans une Ellipſe les points d'attouchemens M, N, de deux Tangentes MF, NL, par une ligne droite MN; & qu'il y ait une troiſiéme Tangente FAL parallele à MN: je dis que les parties FA, AL de cette derniere Tangente, priſes entre ſon point d'attouchement A & les deux premieres, ſe-

ront égales entr'elles. Car ayant mené par le point d'attouchement *A* le diametre *AB*, il est clair que la ligne *MN* est ordonnée de part & d'autre à ce diametre, puisqu'elle est parallele à la Tangente *FL* qui passe par son extremité *A*; &
* *Art.* 289. qu'ainsi il la coupe par le milieu en *P*, & passe * par conséquent par le point de rencontre *T* des deux Tangentes *MF*, *NL*; ou bien il leur sera parallele, si la ligne *MN* est un dia-
* *Art.* 283. metre. Or il est visible en l'un & l'autre cas, que *FL* sera divisé en deux parties égales au point *A* par le diametre *AB*; puisque *MN* l'est en *P* par ce même diametre.

CHAPITRE III.

De la Parabole & de l'Hyperbole en particulier.

PROPOSITION XVII.

Theorême.

291. DANS *une Parabole toute ordonnée* MPN *de part &*
FIG. CLI. *d'autre à un diametre* AB, *est coupée en deux également par ce diametre au point* P: *ce qui est reciproque.*

Ayant fait passer par la ligne *MN* un plan Elliptique, il formera dans le plan touchant *SDE* parallele au plan Parabolique, une Tangente *DE* parallele à *MN*. De plus le plan *SAF* mené par le Sommet *S* du cone, & par la Tangente *AF* qui passe par l'origine *A* du diametre *AB*, formera dans le plan Elliptique une Tangente *af*; & la ligne *Da* qui joint les points d'attouchement des deux Tangentes *DE*, *af*, passera par le point *P*; puisque le diametre *AB* est parallele au côté touchant *SD*. Cela posé.

* *Def.* 14. Puisque par la supposition * les deux lignes *AF*, *MN*, sont paralleles entr'elles; il s'ensuit que la Tangente *af*, qui est la commune Section de deux plans qui passent par ces deux lignes, sera parallele à *MN*; & par conséquent à *DE*.
* *Def.* 13. D'où l'on voit * que la ligne *Da*, qui joint les points d'attouchement des deux Tangentes paralleles *DE*, *af*, est un diametre de l'Ellipse; & qu'ainsi la ligne *MN* qui est paral-
* *Art.* 282. lele à ces Tangentes & terminée par l'Ellipse, sera * divisée en deux également au point *P*.

Maintenant pour prouver la converse, on menera dans le plan de la Parabole * une Tangente *AF* parallele à la ligne *MN*; & ayant tiré par le point d'attouchement *A* un diametre *AB*, il aura pour ordonnée de part & d'autre * la ligne *MN*, qu'il divisera par conséquent en deux parties égales au point *P* selon ce qu'on vient de démontrer. Or comme il n'y a qu'un seul diametre * qui puisse passer par le point de milieu *P* de la ligne *MN*, il s'ensuit &c. * Art. 267. * Def. 14. * Art. 268.

COROLLAIRE.

292. DE-LA il est évident que si l'on mene par deux points quelconques *P*, *Q*, d'un diametre *AB* deux ordonnées de part & d'autre *MPN*, *OQR*; on aura toujours * $MP \times PN$ ou $\overline{PM}^2 . OQ \times QR$ ou $\overline{QO}^2 :: AP . AQ$. C'est à dire que les quarrés des deux ordonnées quelconques *PM*, *QO*, à un diametre *AB*, seront toujours entr'eux, comme les parties *AP*, *AQ*, de ce diametre prises depuis son origine *A* jusqu'à ces mêmes ordonnées. * Art. 277.

PROPOSITION XVIII.

Theorême.

293. *Si par un point quelconque* M *d'une Parabole, l'on mene une ordonnée* MP *à tel de ses diametres* AB *qu'on voudra, & une Tangente* MT *qui rencontre en* T *ce diametre prolongé au de-là de son origine* A : *je dis que ses parties* AP, AT, *sont égales.* Fig. CLI.

La même préparation étant faite que dans la Proposition précédente, soit de plus mené par le Sommet *S* du cone & par la Tangente *MT*, le plan touchant *STM* qui formera dans le plan Elliptique la Tangente *MH*, laquelle rencontrera le diametre *Da* de l'Ellipse en un point *H* par où passera la ligne *ST*; & soit enfin tirée la droite *TG* parallele à *SA*. Ceci bien entendu, on aura * *DH. Ha :: DP. Pa*, & (*alternando*) *DH. DP :: Ha. Pa*. Mais à cause des paralleles *AB*, *SD*, & *SA*, *TG*; il est clair que *DH. DP :: SH. ST :: Ha. Ga*. Donc *Ha. Pa :: Ha. Ga*. Donc aussi *Pa = Ga*; & par conséquent *AP = AT*. *Ce qu'il falloit démontrer.* *(n. 5. 241)

PROPOSITION XIX.

Theorême.

294 *DANS les Hyperboles opposées tout diametre* AB *passe par*
FIG. CLII. *le point d'interſection* C *des deux aſymptotes, & y eſt coupé en deux également : ce qui eſt reciproque.*

On nommera ce point, *Centre.*

Soit *HSb* une des deux communes Sections du plan parallele au plan Hyperbolique, & des deux ſurfaces Coniques oppoſées; & ſoit l'Aſymptote *FG* formée par la rencontre du plan Hyperbolique avec celui qui touche ces deux ſurfaces en cette ligne *HSb*. Soient menées par les Tangentes paralleles *AF*, *BG*, qui paſſent par les extremités du diametre *AB*, & qui rencontrent l'Aſymptote *FG* aux points *F*, *G*, deux plans Elliptiques paralleles; ils formeront dans le plan touchant qui paſſe par le côté *HSb*, les Tangentes paralleles *FH*, *Gbf*, & dans le plan touchant *SAF* les Tangentes paralleles *AF*, *af*.

Cela poſé, les lignes paralleles *FH*, *Gb*, étant renfermées entre les deux autres paralleles *FG*, *Hb*, ſeront égales entr'elles; & les triangles ſemblables *SHF*, *Sbf*, & *SFA*, *Sfa*, donneront cette proportion, *HF*. *bf* :: *SF*. *sf* :: *FA*. *fa*. Et
* Art. 286. partant *HF*. *FA* :: *bf*. *fa* :: * *bG*. *GB*. Donc puiſque *HF* = *bG*, il s'enſuit que *AF* = *BG*; & à cauſe des triangles ſemblables *ACF*, *BCG*, que *AC* = *CB*: c'eſt à dire que l'Aſymptote *FG* paſſe par le point de milieu *C* du diametre *AB*. On prouvera de même que l'autre Aſymptote paſſera encore par le point de milieu *C* du diametre *AB*; d'où l'on voit que le diametre *AB* paſſe par le point d'interſection *C* des deux Aſymptotes, & y eſt coupé en deux parties égales.

Soit à preſent une ligne *AB* qui paſſant par le point d'interſection *C* des deux Aſymptotes, rencontre les Hyperboles oppoſées aux points *A*, *B*. Si l'on mene par le point *A* la Tan-
* Art. 267. gente *AF*, & à l'Hyperbole oppoſée une Tangente *DG* * parallele à *AF*; il eſt clair par ce qu'on vient de prouver que la ligne *AD* qui joint les points d'attouchemens de ces deux Tangentes étant un diametre, paſſera par le point d'interſection *C* des Aſymptotes. Elle ſe confondra donc avec la ligne *AB* qui
* Hyp. paſſe auſſi * par les deux mêmes points *A*, *C*; c'eſt à dire que

le point D tombera sur le point *B*. C'est pourquoi cette ligne *AB* sera un diametre; & partant coupée en deux parties égales au point *C*.

COROLLAIRE.

295. **D**E-LA on voit que d'un point donné au dedans d'une Hyperbole, on ne peut mener qu'un seul diametre; puisqu'il n'y a qu'une seule ligne qui puisse passer par ce point, & par le centre.

PROPOSITION XX.

Theorême.

296. *DANS les Hyperboles opposées toute ordonnée* MPN *de part & d'autre à un diametre* AB, *est coupée en deux également par ce diametre au point* P: *ce qui est reciproque.* FIG. CLIII.

Ayant fait passer par la ligne *MN* un plan Elliptique, il formera dans les deux plans touchans *SAF*, *SBG*, deux Tangentes *af*, *bg*; & la ligne *ab* qui joint les points d'attouchemens de ces deux Tangentes, étant la commune Section du plan Elliptique & du plan *SAB*, passera par le point *P*. Or puisque par la supposition les deux lignes *AF*, *MN*, sont paralleles, il s'ensuit que la ligne *af* qui est la commune Section de deux plans, qui passent par ces deux lignes, sera parallele à *MN*. Par la même raison la Tangente *bg* commune Section du plan Elliptique & du plan touchant *SBG*, lesquels passent par les deux paralleles *MN*, *BG*, sera parallele à *MN*. Les deux Tangentes *af*, *bg*, seront donc paralleles entr'elles: d'où il suit que la ligne *ab* * est un diametre de l'Ellipse; & * qu'ainsi la ligne *MN* * est divisée en deux parties égales * au point *P*. * *Def.* 13. * *Art.* 282.

Maintenant pour prouver la converse, on menera dans le plan des Hyperboles * deux Tangentes *AF*, *BG*, paralleles * à la ligne *MN* terminée par l'Hyperbole; & ayant tiré par leurs points d'attouchemens le diametre *AB*, il est clair selon la Définition quatorziéme, que ce diametre aura pour ordonnée de part & d'autre la ligne *MN*; & qu'ainsi il la coupera selon ce qu'on le vient de démontrer, en deux parties égales * *Art.* 267.

* Art. 295. au point P. Or comme il n'y a qu'un ſeul diametre * qui puiſſe paſſer par ce point, il s'enſuit que ſi une ligne MN terminée par une Hyperbole, eſt coupée en deux également en P par un diametre AB, elle ſera ordonnée de part & d'autre à ce diametre.

COROLLAIRE.

297. DE-LA il eſt évident que ſi l'on mene deux ordonnées de part & d'autre MPN, OQR, à un diametre AB, on aura toujours * $MP \times PN$. ou $\overline{PM}^2$. $OQ \times QR$ ou $\overline{QO}^2$ :: $AP \times PB$. $AQ \times QB$. C'eſt à dire &c.

* Art. 275.

PROPOSITION XXI.

Theorême.

298. *SI par un point quelconque* M *d'une Hyperbole l'on mene* Fig. CLIV. *une Tangente* MFG *qui rencontre deux autres Tangentes paralleles* AF, BG, *aux point* F, G: *je dis que* MF. MG :: AF. BG.

Ayant mené deux plans Elliptiques paralleles qui paſſent par les Tangentes AF, BG; ils formeront dans le plan touchant SMG deux Tangentes HF, bG, paralleles entr'elles; & le plan Elliptique qui paſſe par BG, formera dans le plan touchant SAF, une Tangente af qui rencontrera la Tangente bG au point f, où la ligne FS rencontre ce plan Elliptique. Cela poſé, les Tangentes af, BG, ſeront paralleles entr'elles; puiſqu'elles le ſont chacune à la Tangente AF: & partant * on aura BG. Gb :: af. fb (à cauſe des triangles ſemblables Sbf, SHF, & Saf, SAF,) :: AF. FH. Donc BG. AF :: Gb. FH (à cauſe des triangles ſemblables MGb, MFH,) :: MG. MF. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* Art. 268.

Il eſt viſible qu'on peut tirer de cette Propoſition les mêmes Corollaires, que dans l'Ellipſe art. 287 288. 289. & 290. c'eſt pourquoi je ne m'amuſerai point à les repeter.

PROP.

PROPOSITION XXII.

Theorême.

299. *SI une ligne droite* FG *terminée par les Asymptotes d'une Hyperbole, la touche en un point* A; *je dis que cette ligne droite y sera coupée en deux parties égales.* FIG. CLV.

Soient menés par le Sommet *S* du cone, & par les deux Asymptotes *CF*, *CG*, deux plans, lesquels toucheront * la surface Conique dans les côtés *SM*, *SN*, où le plan *MSN* parallele au plan Hyperbolique la rencontre. Soit mené un plan Elliptique qui passe par la droite *FG*: il formera dans les deux plans touchans deux Tangentes *MF*, *NG*, & dans le plan *MSN* une ligne droite *MN* parallele à *FG*, & qui joint les points d'attouchemens de ces deux Tangentes. Cela posé, il est visible que la ligne *FG* * est coupée en deux parties égales au point *A*, puisqu'elle touche dans ce point l'Ellipse, aussi bien que l'Hyperbole. * *Def.* 16. * *Art.* 290.

COROLLAIRE I.

300. COMME il ne peut y avoir qu'une seule ligne *FG* qui passant par un point donné *A* au dedans d'un angle *FCG*, & étant terminée par ses côtés, soit coupée en deux également par ce point *A*; il s'ensuit que si une ligne droite *FG* terminée par les Asymptotes d'une Hyperbole, la rencontre en un point *A* qui divise cette droite *FG* en deux parties égales, elle touchera l'Hyperbole en ce point.

COROLLAIRE II.

301. DE-LA on voit que pour mener d'un point donné *A* sur une Hyperbole dont les Asymptotes *CF*, *CG*, sont données, une Tangente *FAG*; il n'y a qu'à tirer la ligne *AD* parallele à l'une des Asymptotes *CG*, & terminée par l'autre, & ayant pris la partie *DF* égale à *CD*, tirer la ligne *FAG*: elle sera la Tangente cherchée. Car à cause des triangles semblables *FCG*, *FDA*, la ligne *FG* sera coupée par le milieu en *A*; puisque * *CF* l'est en *D*. * *Hyp.*

COROLLAIRE III.

302. FIG. CLVI. Si l'on joint deux points quelconques M, N, d'une Hyperbole MAN par une ligne droite qui rencontre les Asymptotes aux points H, K; les deux parties MH, NK, de cette droite renfermées entre l'Hyperbole & les Asymptotes, seront égales entr'elles. Car ayant mené par le point P milieu de MN, le diametre CP; & par le point A où ce diametre rencontre l'Hyperbole, la ligne FG parallele à MN, & terminée par
* Art. 296. les Asymptotes: il est clair * que cette ligne FG sera Tangen-
* Art. 299. te en A; & par conséquent * divisée en deux parties égales en ce point. D'où il est clair, à cause des triangles semblables CAF, CPH, & CAG, CPK, que $PH = PK$; & par conséquent $MH = NK$.

COROLLAIRE IV.

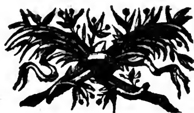
303. FIG. CLVII. Si d'un point donné A sur une Hyperbole, l'on tire deux droites AF, AG, terminées par ses Asymptotes; & que d'un autre point quelconque M de la même Hyperbole, ou de son opposée, on tire deux autres droites MH, MK, terminées aussi par ses Asymptotes, & paralleles aux deux premieres AF, AG: je dis que $FA \times AG = HM \times MK$.

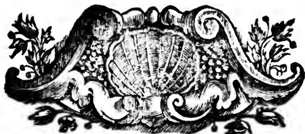
Car 1°. Lorsque les deux points A, M, tombent sur la même Hyperbole; ayant joint ces deux points A, M, par une ligne droite qui rencontre les Asymptotes en P & Q, les triangles semblables PAF, PMH, & QMK, QAG, donneront
* Art. 302. ces deux proportions, $AF. MH :: AP. MP$ * $:: MQ. AQ :: MK. AG$. ce qui donne, en multipliant les extrêmes & les moyens, $FA \times AG = HM \times MK$.

2°. Lorsque les points A, M, tombent sur les deux Hyperboles opposées; ayant mené par le point donné A & par le centre C, le diametre AB, & tiré les droites BD, BE, paralleles à AF, AG, & terminées par les mêmes Asymptotes; il est clair que les triangles CAF, CBD, & CAG, CBE,
* Art. 294. seront semblables & de plus égaux entr'eux, puisque * $CA = CB$. C'est pourquoi $BD = AF$, & $BE = AG$; & partant $DB \times BE = FA \times AG$. Or selon le cas précédent $KM \times MH = DB \times BE$. Donc aussi $FA \times AG = KM \times MH$.

AVERTISSEMENT.

Je laiſſe les autres proprietés des Aſymptotes, & des Diametres conjugués, parce qu'elles ſe tirent de celles-ci ſur le plan, comme l'on a fait dans le troiſiéme Livre; mon deſſein n'étant ici que de faire voir de quelle utilité peut être la conſideration du Solide, pour démontrer tout à la fois & ſans aucun calcul, les proprietés de tous les Diametres, des Tangentes, & des Aſymptotes; d'où dépendent toutes les autres. C'eſt ce que je crois avoir executé d'une maniére fort aiſée, & entierement nouvelle; puiſque je ne me ſuis point ſervi de lignes coupées harmoniquement, comme ont fait les Geometres Modernes après M^rs. *Paſchal* & *Deſcartes*; ce qui les a obligés d'avoir recours à un grand nombre de Lemmes, dont les démonſtrations ſeules me paroiſſent auſſi longues que celles de tout ce Livre.





LIVRE SEPTIÉME.

Des Lieux Geometriques.

DÉFINITION I.

FIG. CLVIII. CLIX.



SOIENT deux droites inconnuës & indéterminées AP, PM, qui fassent entr'elles un angle APM donné ou pris à volonté; & dont l'une AP que j'appellerai toujours x, ait un commencement fixe au point A, & s'étende indéfiniment le long d'une ligne droite donnée de position; & l'autre PM que je nommerai y, en change continuellement, & soit toujours parallele à elle même: c'est à dire que toutes les droites PM doivent être paralleles entr'elles. Soit de plus une équation qui ne renferme que ces deux inconnuës x & y mêlées avec des connuës, & qui exprime la relation de chaque indéterminée AP (x) à sa correspondante PM (y). La ligne droite ou courbe qui passe par les extremités de toutes les valeurs de y, c'est à dire, par tous les points M, est appellée en général un *Lieu Geometrique*, & en particulier le *Lieu* de cette équation.

FIG. CLVIII. Supposons, par exemple, que l'équation $y = \frac{bx}{a}$ doive exprimer toujours la relation de AP (x) à PM (y) qui font entr'elles un angle donné ou pris à volonté APM. Ayant pris sur la ligne AP la partie $AB = a$, & de B mené $BE = b$ parallele à PM & du même côté; la droite indéfinie AE sera nommée en général un *Lieu Geometrique*, & en particulier le *Lieu* de cette équation. Car ayant mené d'un de ses points quelconques M la droite MP parallele à BE, les triangles semblables ABE, APM, donneront toujours cette pro-

portion, AB (a). BE (b) :: AP (x). PM (y) $= \frac{bx}{a}$. Et partant la droite AE est le lieu de tous les points M.

De même si $yy = aa - xx$ exprime la relation de AP à PM, & que l'angle APM soit droit ; la circonference d'un cercle qui a pour rayon la droite $AB = a$ prise sur la ligne AP, sera appellée en general un *Lieu Geometrique*, & en particulier le *Lieu* de cette équation. Car ayant mené d'un de ses points quelconques M, la perpendiculaire MP (y), on aura toujours par la proprieté du cercle, $\overline{PM}^2$ (yy) $= DP \times PB$ ($aa - xx$) en prenant BD pour le diametre de ce cercle. D'où l'on voit que sa circonference est le lieu de tous les points M. FIG. CLIX.

REMARQUE.

304. Si après avoir supposé que les PM tendent vers un certain côté de la ligne AB, comme vers Q, on suppose ensuite qu'elles tendent vers le côté opposé, comme vers G ; il faut remarquer que leurs valeurs deviennent négatives de positives qu'elles étoient, & qu'ainsi on a pour lors $PM = -y$. De même si après avoir supposé que les points P tombent d'un certain côté par rapport au point A, comme du côté de B, on suppose ensuite qu'ils tombent du côté opposé, comme vers D ; les AP deviendront négatives de positives qu'elles étoient, & on aura par conséquent $AP = -x$, Les positives de ces valeurs s'appellent aussi Valeurs *vraies* ; & les négatives, Valeurs *fausses*. Or un lieu Geometrique doit passer par les extremités de toutes les valeurs tant vraies que fausses de l'inconnuë y, qui répondent aux valeurs tant vraies que fausses de l'autre inconnuë x. Si donc l'on mene la droite QAG parallele à PM, un lieu Geometrique pourra se trouver dans les quatre angles BAQ, BAG, GAD, DAQ, comme dans le second exemple (*fig.* 159.), ou seulement dans quelques-uns de ces angles comme dans le premier (*fig* 158). Car supposé dans le second exemple, qu'on fasse d'abord $AP = x$, & $PM = y$, en prenant le point M sur le quart BQ de la circonference ; si ensuite le point M est pris sur le quart GB, on aura $AP = x$, & $PM = -y$; s'il est pris sur DG, on aura $AP = -x$, & $PM = -y$; & enfin s'il est pris sur DQ, on aura $AP = -x$, & $PM = y$; & il viendra toujours dans tous ces cas FIG. CLVIII. CLIX.

par la proprieté du cercle, la même équation $yy = aa - xx$; parce que les quarrés de $+ y$ & de $+ x$ sont les mêmes dans tous ces cas, sçavoir yy & xx. De même dans le premier exemple, si en prenant d'abord le point *M* du côté de *E* sur *AE*, dans l'angle *QAP*, on fait $AP = x$, & $PM = y$; Ce point *M* pris ensuite sur *EA* prolongée du côté de *A* dans l'angle *GAD*, donnera $AP = - x$, & $PM = - y$; & à cause des triangles semblabl s *ABE*, *APM*, on formera cette proportion $AB (a) . BE (b) :: AP (- x) . PM (- y) = - \frac{bx}{a}$; & partant $y = \frac{bx}{a}$, qui est la même équation que l'on trouve en supposant que le point *M* tombe dans l'angle *BAQ*.

AVERTISSEMENT.

Lorsqu'il s'agira dans la suite de construire le lieu d'une équation donnée, on supposera toujours que $AP (x)$ & $PM (y)$ soient positives, c'est à dire que tous les points *M* tombent dans le même angle *BAQ*. Et on prendra pour le lieu de l'équation donnée la portion du lieu qui sera renfermée dans cet angle.

DE'FINITION II.

Les anciens Geometres ont appellé *Lieux plans*, ceux qui sont des lignes droites, ou des cercles; *Solides*, ceux qui sont des Paraboles, des Ellipses, ou des Hyperboles. Mais les Modernes distribuent les lieux Geometriques en differens degrés: ils comprennent sous le premier tous ceux où les inconnuës x & y n'ont qu'une dimension dans leurs équations; sous le second, tous ceux où elles n'en ont que deux; sous le troisiéme, tous ceux où elles n'en ont que trois; & ainsi de suite. Où l'on doit observer que les inconnuës x & y ne se doivent point multiplier l'une l'autre dans le premier degré; qu'elles ne doivent faire au plus ensemble qu'un produit de deux dimensions xy dans le second, un de trois xxy ou xyy dans le troisiéme, &c.

DE'FINITION III.

Les termes de l'équation d'un lieu, sont regardés comme differens entr'eux lorsque l'une ou l'autre des inconnuës x & y, ou toutes les deux jointes ensemble s'y trouvent avec differentes dimensions. Ainsi dans le premier degré si l'on propose l'é-

quation $y - \frac{bx}{a} + c = o$, les termes y, $-\frac{bx}{a}$, c, seront differens ; & de même dans le second, si l'on proposoit $yy + \frac{2bxy}{a} - 2cy - \frac{fxx}{a} + gx + bx - bb + ll = o$, les termes yy, $\frac{2bxy}{a}$, $-2cy$, $-\frac{fxx}{a}$, $gx + bx$, $-bb + ll$, seroient chacun differens.

AVERTISSEMENT.

Je n'expliquerai ici en détail que les lieux du premier & du second degré ; ce que j'en dirai donnera beaucoup d'ouverture pour construire des lieux plus composés dans les cas particuliers qui se peuvent rencontrer : on en trouvera même quelques exemples dans la suite. Mon dessein est donc de donner dans ce Livre une méthode génerale pour construire les lieux du premier & du second degré, leurs équations étant données ; & de faire voir que le premier ne renferme que la ligne droite ; & que le second ne renferme de même que la Parabole, l'Ellipse & le Cercle, l'Hyperbole & les Hyperboles opposées.

DEMANDE.

305. ON demande qu'on puisse réduire sous une fraction simple & abregée, toute quantité litterale donnée, si composée qu'elle puisse être.

On demande par exemple, 1°. Qu'on puisse prendre une fraction simple $\frac{b}{a} = \frac{cc+ff}{af+fe} + \frac{aa}{gg}$, où les lettres a, c, f, g, marquent des lignes données. 2°. Qu'on puisse trouver une seule ligne droite $s = \frac{ace-bce}{bb+af}$, où les lignes droites a, b, c, e, f, g, sont données. 3°. Qu'on puisse trouver un quarré $tt = ss - \frac{ccee-eehh}{bb+af}$, où les lignes a, b, c, e, f, h, s, sont données; de sorte qu'on ait son côté $t = \sqrt{ss - \frac{ccee-eehh}{bb+af}}$. On enseignera au commencement du huitiéme Livre comment cela se fait.

PROPOSITION I.

Problême.

306. *CONSTRUIRE tout lieu du premier degré, son équation étant donnée.*

Lorsque les inconnuës x & y n'ont qu'une dimension dans l'équation proposée, & que leur produit xy ne s'y rencontre point ; le lieu de cette équation sera toujours une ligne droite, & on la reduira à l'une des quatre formules suivantes.

1°. $y=\frac{bx}{a}$, 2°. $y=\frac{bx}{a}+c$, 3°. $y=\frac{bx}{a}-c$, 4°. $y=c-\frac{bx}{a}$, dans lesquelles on suppose que l'inconnuë y soit délivrée de fractions, & que la fraction qui multiplie l'autre inconnuë x soit réduite * sous cette expression $\frac{b}{a}$, & tous les termes connus sous cette autre c.

* Art. 305.

Les mêmes choses étant posées que dans la définition premiere, on construira les lieux des trois dernieres formules de la maniere qui suit ; car pour le lieu de la premiere, on l'a déja construit dans cette definition.

FIG. CLX. Pour construire le lieu de la seconde formule $y=\frac{bx}{a}+c$, on prendra sur la ligne AP la partie $AB=a$; & ayant mené les droites $BE=b$, $AD=c$, paralleles à PM & du même côté, on tirera la ligne AE indéfinie du côté de E, & la droite indéfinie DM parallele à AE. Je dis que cette ligne DM renfermée dans l'angle PAQ fait par la ligne AP & par la droite AQ menée parallelement à PM & du même côté, sera la ligne de cette équation ou formule. Car ayant mené d'un de ses points quelconques M la ligne MP parallele à AQ & qui rencontre AE en F ; les triangles semblables ABE, APF, donneront $AB\ (a).\ BE\ (b) :: AP\ (x).\ PF=\frac{bx}{a}$. Et partant $PM\ (y)=PF\ (\frac{bx}{a})+FM\ (c)$.

FIG. CLXI. Le lieu de la troisiéme formule $y=\frac{bx}{a}-c$ se construit en cette sorte. Ayant pris $AB=a$, & mené les droites $BE=b$, $AD=c$, paralleles à PM ; sçavoir, BE du même côté que AQ, & AD du côté opposé ; on tirera par les points A, E, la droite AE indéfinie du côté de E, & par le point D la ligne DM parallele à AE, & qui rencontre AP en G. Je dis que la droite indéfinie GM renfermée dans l'angle PAQ, sera le lieu qu'on cherche. Car on aura toujours $PM\ (y)=PF\ (\frac{bx}{a}-FM\ (c)$.

FIG. CLXII. Enfin pour avoir le lieu de la quatriéme formule $y=c-\frac{bx}{a}$. Ayant pris sur AP la partie $AB=a$, & mené les droites $BE=b$, $AD=c$, paralleles à PM ; sçavoir BE du côté opposé, & AD du même côté que AQ ; on tirera par les points A, E, la ligne AE indéfinie du côté de E, & par le point D la ligne DM parallele à AE, & qui rencontre en G

la

la ligne *AP*. Je dis que la droite *DG* renfermée dans l'angle *PAQ*, sera le lieu cherché. Car ayant mené d'un de ses points quelconques *M* la ligne *MP* parallele à *AQ*, & qui rencontre *AE* en *F*, on aura toujours. $PM\ (y) = FM\ (c) - PF\ (\frac{bx}{a})$.

Si l'inconnuë x n'est multipliée par aucune fraction, les quatre formules précédentes se changeront en celles ci.

1°. $y = x$, 2°. $y = x + c$, 3°. $y = x - c$, 4°. $y = c - x$, lesquelles se construisent de la même maniere, en observant de prendre la droite *BE* égale à *AB* que l'on prend de telle grandeur qu'on veut.

REMARQUE.

307. Il peut arriver que l'équation soit un lieu à la ligne droite, quoiqu'elle ne renferme qu'une des inconnuës x ou y; ce qui donne encore ces deux nouvelles formules, $y = c$, & $x = c$.

Pour construire la premiere formule $y = c$. Les mêmes choses étant toujours posées que dans la définition premiere; on menera par le point fixe *A*, la droite $AD = c$ parallele à *PM* & du même côté, on tirera ensuite la droite indéfinie *DM* parallele à *AP*: je dis que cette ligne *DM* sera le lieu de l'équation proposée. Car ayant mené d'un de ses points quelconques *M* la droite *MP* parallele à *AD*, il est clair qu'on aura toujours $PM\ (y). = AD\ (c)$. FIG. CLXIII.

Pour construire la seconde formule $x = c$. Ayant pris $AP = c$, on tirera la droite indefinie *PM* qui fasse avec *AP* l'angle *APM* donné ou pris à volonté: je dis qu'elle sera le lieu de tous les points *M*. Car ayant mené d'un de ses points quelconques *M*, la droite *MQ* parallele à *AP*, & qui rencontre au point *Q* l'indéfinie *AQ* parallele à *PM*; il est clair qu'on aura toujours *MQ* ou $AP\ (x) = c$, de quelque grandeur que l'on puisse prendre $PM\ (y)$. FIG. CLXIV.

AVERTISSEMENT.

Je crois qu'il est à propos pour éclairer l'esprit des Lecteurs, de leur donner une idée de la méthode dont je vais me servir pour la construction des lieux du second degré. Elle consiste à construire d'abord une Parabole en sorte que l'équation qui en exprime la nature soit la plus composée qu'il se puisse, de fai-

re ensuite la même chose dans l'Ellipse, & dans l'Hyperbole rapportée à ses diametres & considerée entre les asymptotes; ce qui fournit des équations ou formules generales. J'examine ce qu'elles ont chacune de particulier, afin qu'une équation étant proposée, je puisse connoître à laquelle de ces formules elle doit être rapportée; & comparant ensuite tous ses termes avec ceux de la formule; j'en tire la construction du lieu de cette équation, en observant certaines remarques qui servent pour toutes les formules. Tout ceci s'éclaircira parfaitement dans les Lemmes & Propositions qui suivent.

LEMME FONDAMENTAL.

Pour la construction des lieux à la Parabole.

308. FIG. CLXV. & CLXVI. SOIENT comme dans la premiere définition deux lignes droites inconnuës & indéterminées AP (x), PM (y); & soient de plus des lignes droites données e, m, n, p, r, s. Cela posé.

FIG. CLXV. 1°. On prendra sur la ligne AP, la partie $AB = m$; ayant mené les droites $BE = n$, $AD = r$, paralleles à PM & du même côté, on tirera par le point A la droite AE que j'appelle e, & par le point D la droite indéfinie DG parallele à AE; sur laquelle DG ayant pris la partie $DC = s$ du côté de PM, on décrira * du diametre CG qui ait pour parametre $CH = p$, & pour ordonnées des droites paralleles à PM; une Parabole CM qui s'étende du même côté que AP. Je dis que sa portion renfermée dans l'angle PAD, fait par la ligne AP, & par une ligne AD menée par le point fixe A parallelement à PM & du même côté, est le lieu de l'équation ou formule suivante.

* Art. 161.

$$yy - \frac{2n}{m}xy + \frac{nn}{mm}xx - 2ry + \frac{2nr}{m}x + rr = 0.$$
$$- \frac{ep}{m}x + ps.$$

Car ayant mené d'un des points quelconques M de cette portion de Parabole, la ligne MP qui fasse avec AP l'angle donné ou pris à volonté APM, & qui rencontre les paralleles AE, DG, aux points F, G; les triangles semblables ABE, APF, donneront ces deux proportions, AB (m). AE (e) :: AP (x). AF ou $DG = \frac{ex}{m}$. Et AB (m). BE (n) :: AP (x). $PF = \frac{nx}{m}$. Et par conséquent GM ou $PM - PF - FG = y - \frac{nx}{m}$

$-r$, & CG ou $DG - DC = \frac{ex}{m} - s$. Or la Parabole donne * $\overline{GM}^2 = CG \times CH$, laquelle équation ſe change en la précédente en mettant pour ces lignes leurs valeurs analytiques. Donc &c.

2°. On menera par le point-fixe A, une ligne droite indé- Fig. CLXVI.
finie AQ parallele à PM & du même côté; & ayant pris ſur
cette ligne la partie $AB = m$, on tirera $BE = n$ parallele à
AP & du même côté que PM, & par les points déterminés
A, E, la ligne AE que j'appelle e; & ayant pris ſur AP la
partie $AD = r$ du même côté que PM, on tirera la droite
indéfinie DG parallele à AE, ſur laquelle on prendra la partie
$DC = s$ auſſi du même côté de PM. On décrira enſuite du * Art. 161.
diametre CG qui ait pour parametre $CH = p$, & pour ordonnées des droites paralleles à AP, une Parabole CM qui s'étende du même côté que AQ. Je dis que ſa portion renfermée dans l'angle BAP, ſera le lieu de cette ſeconde équation ou formule.

$$xx - \frac{2n}{m} yx + \frac{nn}{mm} yy - 2rx + \frac{2nr}{m} y + rr = 0.$$
$$- \frac{ep}{m} y + ps.$$

Car ayant mené d'un de ſes points quelconques M, la ligne MQ parallele à AP, & qui rencontre les paralleles AE, DG, aux points F, G; les triangles ſemblables ABE, AQF, donneront ces deux proportions, $AB\ (m) . AE\ (e) :: AQ$ ou $PM\ (y) . AF$ ou $DG = \frac{ey}{m}$. Et $AB\ (m) . BE\ (n) :: AQ\ (y) . QF = \frac{ny}{m}$. Et par conſéquent GM ou $QM - QF - FG = x - \frac{ny}{m} - r$, & CG ou $DG - DC = \frac{ey}{m} - s$. Et la Parabole donne $\overline{GM}^2 = CG \times CH$, laquelle équation ſe change en la précédente en mettant pour ces lignes leurs valeurs analytiques. Donc &c.

COROLLAIRE.

309. IL eſt clair 1°. Que dans la premiere de ces équations ou formules, le quarré yy ſe trouve ſans fraction, & que dans la ſeconde c'eſt le quarré xx. 2°. Que dans ces deux formules les deux quarrés yy & xx s'y trouvent avec les mêmes lignes, en ſorte que le quarré $\frac{nn}{mm}$ de la moitié de la fraction $\frac{2n}{m}$ qui multiplie le plan xy, multiplie l'un des quarrés xx ou yy; d'où il ſuit que ſi le plan xy ne ſe rencontroit point dans l'une

ou l'autre de ces deux formules, le quarré $\frac{nnxx}{mm}$ ou $\frac{nnyy}{mm}$ ne s'y rencontreroit point non plus, puifqu'alors la fraction donnée $\frac{2n}{m}$ feroit nulle.

PROPOSITION II.

Problême.

310. *CONSTRUIRE le lieu d'une équation donnée, dans laquelle le plan* xy *ne fe rencontrant point, il n'y a qu'un des deux quarrés* xx *&* yy; *ou bien le plan* xy *s'y rencontrant, les deux quarrés* xx *&* yy *s'y rencontrent auffi avec les mêmes fignes, en forte que le quarré de la moitié de la fraction qui multiplie* xy, *foit égal à celle qui multiplie le quarré de l'une des inconnuës. On fuppofe toujours qu'il y ait un des quarrés* xx *ou* yy *qui foit délivré de fractions.*

On comparera chaque terme de l'équation donnée, avec celui qui lui répond dans la premiere formule du Lemme précédent, fi le quarré yy s'y rencontre fans fraction; ou avec celui qui lui répond dans la feconde formule, lorfque c'eft le quarré xx. On tirera enfuite de la comparaifon de ces termes, des valeurs des quantités e, m, n, p, r, s, par le moyen defquelles on décrira comme l'on a enfeigné dans le Lemme (en fe fervant des deux Remarques fuivantes) une Parabole qui fera le lieu cherché.

REMARQUE I.

311. 1°. ON prendra pour AB (m) telle grandeur pofitive que l'on voudra. 2°. Les lignes AB (m), BE (n) étant données, la ligne AE (e) l'eft auffi puifque l'angle ABE eft donné. 3°. Lorfque $n = o$, la ligne AE tombe fur AB, c'eft à dire, fur AP dans la conftruction de la premiere formule, & fur AQ dans celle de la feconde: alors on aura AB (m) $=$ AE (e), puifque les points B, E, fe confondront alors enfemble. 4°. Lorfque la valeur de l'une des quantités n, r, s, eft négative, il faut prendre ou mener la ligne qu'elle exprime du côté oppofé à celui de PM; au lieu qu'il la faut mener du même côté, comme l'on a fait dans le Lemme, lorfqu'elle eft pofitive.

REMARQUE II.

312. S'IL arrive que la valeur du parametre CH (p) ſoit négative, il faudra que la Parabole s'étende du côté oppoſé à celui du Lemme: c'eſt à dire, du côté oppoſé à celui vers lequel s'étend l'indéterminée AP dans la conſtruction de la premiere formule, & l'indéterminée AQ dans celle de la ſeconde. Tout ceci s'éclaircira parfaitement par les Exemples qui ſuivent.

EXEMPLE I.

313. SOIT $yy - 2ay - bx + cc = o$ l'équation donnée, dont il faut conſtruire le lieu.

Comme le quarré yy ſe trouve ici ſans fraction, je choiſis la premiere formule * du Lemme, de laquelle comparant *Art. 308. n. 1.
chaque terme avec celui qui lui répond dans la propoſée, j'ai 1° $\frac{2n}{m} = o$, parce que le plan xy ne ſe rencontrant point dans la propoſée, on doit regarder ce plan comme étant multiplié par zero; d'où je tire $n = o$, & par conſequent * $m = e$: *Art. 311.
c'eſt pourquoi effaçant dans la formule tous les termes où $\frac{n}{m}$ ſe rencontre, & mettant au lieu de e ſa valeur m, je trouve $yy - 2ry - px + rr + ps = o$. 2°. La comparaiſon des termes correſpondans $- 2ry$ & $- 2ay$ donne $r = a$. 3°. Celle de $- px$ & $- bx$ fournit $p = b$. 4°. Celle des termes où les inconnuës x & y ne ſe trouvent point, donne enfin $rr + ps = cc$, d'où en mettant pour r & p leurs valeurs a & b, je tire $s = \frac{cc - aa}{b}$ qui eſt une valeur négative lorſque a ſurpaſſe c, comme on le ſuppoſe ici. Je n'ai point comparé les premiers termes yy & yy entr'eux; parce qu'étant préciſément les mêmes, cela ne feroit rien connoître. Or les valeurs de n, r, p, s, étant ainſi déterminées, je conſtruis le lieu en me ſervant de la conſtruction * de la formule, & obſervant ce qu'il y a dans *Art. 308. n. 1 1.
la premiere * Remarque en cette ſorte. *Art. 311.

Puiſque BE $(n) = o$, les points B, E, ſe confondent, & la ligne AE tombe * ſur AP; c'eſt pourquoi je mene d'abord *Art. 311.
par le point fixe A la ligne AD $(r) = a$ parallele à PM, & FIG. CLXVII.
du même côté, parce que ſa valeur eſt poſitive. Je tire enſuite DG parallele à AP, ſur laquelle je prends $DC = \frac{aa - cc}{b} = - s$ du côté oppoſé à PM; parce que $s = \frac{cc - aa}{b}$, qui eſt

*Art. 161. une valeur négative. Je décris enfin * du diametre CG (qui ait pour parametre la ligne $CH\ (p) = b$, & pour ordonnées des droites paralleles à PM) une Parabole ; & je dis que ses deux portions OMM, RMS, renfermées dans l'angle PAO fait par AP & par la ligne AO menée parallelement à PM & du même côté, sera le lieu de l'équation donnée.

Car menant d'un de leurs points quelconques M, la ligne MP qui fasse avec AP l'angle donné ou pris à volonté APM, & qui rencontre DG au point G ; on aura $GM = y - a$, ou $GM = a - y$, selon que le point M tombera audessus ou audessous du diametre CG ; & CG ou $DG + CD = x + \frac{aa - cc}{b}$;
*Art. 19. & partant * par la proprieté de la Parabole, $\overline{GM}^2\ (yy - 2ay + aa) = CG \times CH\ (bx + aa - cc)$, c'est à dire $yy - 2ay - bx + cc = 0$, qui est l'équation donnée. Donc &c.

REMARQUE.

314. Si l'on prolonge AO de l'autre côté de A vers X, il faut remarquer,

1°. Que la portion indéfinie SM de la Parabole, renfermée dans l'angle SAX, sera le lieu de toutes les valeurs fausses & de l'inconnuë y, qui répondent aux valeurs vraies de l'autre inconnuë x dans l'équation donnée. En effet si l'on prend AP plus grande que AS, & qu'on mene PM parallele à AX, & du même côté, laquelle rencontre la portion SM en M ; l'on
*Art. 304. aura * $PM = -y$, & partant la droite GM ou $GP + PM = a - y$, & on retrouvera par la proprieté de la Parabole, comme ci-dessus, l'équation donnée.

2°. Que la portion RCO de cette Parabole, qui tombe dans l'angle TAO opposé au sommet à l'angle SAX, sera le lieu de toutes les valeurs vraies de l'inconnuë y dans l'équation donnée, qui répondent aux valeurs fausses de l'autre inconnuë x ;
*Art. 304. car faisant * $AP = -x$, on retrouvera encore l'équation donnée.

3°. Que s'il tomboit une portion de cette Parabole dans l'angle TAX opposé au sommet à l'angle PAO elle feroit le lieu des valeurs fausses de l'inconnuë y, qui répondroient aux valeurs fausses de l'autre inconnue x. De sorte que cette Parabole est le lieu complet de toutes les valeurs tant vraies que fausses de l'inconnuë y, qui répondent à toutes les valeurs tant

vraies que fausses de l'autre inconnuë x dans l'équation donnée $yy - 2ay - bx + cc = o$.

D'où l'on voit que dans cet Exemple il y a deux valeurs vraies PM, PM, de l'inconnuë y, qui répondent à la même valeur vraie AP de l'autre inconnuë x, lorsque cette ligne AP est moindre que AS; qu'il y a une valeur vraie PM, & une fausse $- PM$, lorsque AP surpasse AS; qu'il n'y a qu'une valeur vraie SV de y, l'autre étant nulle ou zero, lorsque $AP = AS$; qu'il y a deux valeurs vraies PM, PM, de l'inconnuë y, qui répondent à la même valeur fausse $- AP$ de l'inconnuë x, lorsque AP est moindre que AT; que ces deux valeurs deviennent égales chacune à la Tangente TC, lorsque $AP = AT$; & qu'enfin si l'on prenoit AP $(- x)$ plus grande que AT, comme l'appliquée PM ne rencontreroit alors la Parabole en aucun point, il s'ensuivroit qu'il n'y auroit aucune valeur vraie ou fausse de l'inconnue y, qui pût répondre à cette valeur fausse $- AP$ de l'autre inconnuë x: c'est à dire que les valeurs de l'inconnuë y deviendroient en ce cas imaginaires.

Tout ceci se doit entendre de la même maniere dans tous les autres exemples qui suivent, tant dans la Parabole que dans les autres Sections Coniques: de sorte que la Section Conique qu'on trouvera, sera non seulement le lieu de toutes les valeurs vraies de l'inconnuë y par rapport aux valeurs vraies de l'autre inconnuë x; mais aussi celui de toutes les valeurs tant vraies que fausses de l'inconnuë y par rapport aux valeurs tant vraies que fausses de l'autre inconnuë x.

EXEMPLE II.

315. SOIT l'équation donnée $yy + \frac{2b}{a}xy + \frac{bb}{aa}xx + 2cy - bx + cc = o$, dont il faille construire le lieu.

Comme le quarré yy est ici sans fraction, je choisis de même que dans l'Exemple précédent, la premiere formule * du Lemme; & j'ai par la comparaison de ses termes avec ceux qui leur répondent dans la proposée, 1°. $\frac{2n}{m} = - \frac{2b}{a}$; d'où en faisant * $m = a$, je tire $n = - b$. 2°. $\frac{nn}{mm} = \frac{bb}{aa}$; d'où il vient, comme ci-dessus, $n = - b$. 3°. $r = - c$. 4°. $\frac{2nr - mp}{m} = - b$; & partant $p = \frac{ab + 2bc}{a}$, en mettant pour m, n, r, leurs valeurs a, $- b$, $- c$. 5°. $rr + ps = cc$;

ce qui donne $s = o$, en mettant pour rr sa valeur cc. Or ces valeurs de m, n, r, p, s, étant ainsi déterminées, je construis le lieu de cette équation en me servant de la construction
* Art. 308. n. 1. * de la premiere formule en cette sorte.

FIG. CLXVIII. Ayant pris sur la ligne AP la partie $AB\ (m) = a$, je mene les droites $BE = b = -n$, $AD = c = -r$ paralleles à PM, & du côté opposé, parce que $n = -b$ & $r = -c$ qui sont des valeurs négatives. Je tire ensuite par les points déterminées A, E, la ligne $AE\ (e)$ qui est donnée, & par le point D la ligne DG parallele à AE. Cela fait comme $DC\ (s)$ est nulle ou zero, le point C tombe sur D; c'est pourquoi je
* Art. 161. décris * du diametre DG (qui ait pour parametre $DH\ (p) = \frac{ab + 2bc}{e}$, & pour ordonnées des droites paralleles à PM) une Parabole, & je dis que sa portion OM renfermée dans l'angle PAH, où l'on suppose que doivent tomber tous les points M, sera le lieu de l'équation donnée.

Car ayant mené d'un de ses points quelconques M, la ligne MP qui fasse avec AP l'angle donné ou pris à volonté APM, & qui rencontre les paralleles AE, DG, aux points F, G; les triangles semblables ABE, APF, donneront ces deux proportions, $AB\ (a)$. $AE\ (e)$ :: $AP\ (x)$. AF ou $DG = \frac{ex}{a}$. Et $AB\ (a)$. $BE\ (b)$ :: $AP\ (x)$. $PF = \frac{bx}{a}$. Et par conséquent GM ou $PM + PF + FG = y + \frac{bx}{a} + c$. Or par la proprie-
* Art. 19. té * de la Parabole, $\overline{GM}^2 = GD \times DH$, c'est à dire, en mettant les valeurs analytiques, $yy + \frac{2b}{a}xy + \frac{bb}{aa}xx + 2cy - bx + cc = o$. Donc &c.

REMARQUE I.

316. Si la ligne AP ne coupoit point la Parabole, mais qu'elle la
FIG. CLXVIII touchât ou qu'elle tombât toute entiere au dehors, il s'ensuivroit qu'aucun des points cherchés M ne pourroit tomber dans l'angle PAH, comme l'on avoit supposé en faisant la construction; & qu'ainsi il n'y auroit aucune valeur vraie de l'inconnuë y qui répondit à une valeur vraie de l'autre inconnuë x, de quelque grandeur qu'elle pût être.

Cette Remarque est générale pour tous les Exemples pareils à celui-ci, non seulement dans la Parabole, mais aussi dans les autres Sections.

REMARQ.

REMARQUE II.

317. Il eſt à propos de remarquer que ſi l'on avoit pris pour AB (m) une autre grandeur que a, telle qu'elle pût être, les valeurs de BE (n) & de AE (e) changeroient à la verité: mais les rapports $\frac{n}{m}$, $\frac{e}{m}$, demeureroient toujours les mêmes; parce que dans le triangle ABE l'angle ABE eſt donné, comme auſſi la raiſon du côté AB au côté BE, ſçavoir dans cet Exemple $\frac{n}{m} = \frac{b}{a}$. Or comme il n'y a que ces raiſons de $\frac{n}{m}$, $\frac{e}{m}$, qui ſe puiſſent trouver dans les valeurs de p, r, s; il s'enſuit que ces valeurs demeurent toujours les mêmes, telle grandeur poſitive que l'on puiſſe prendre pour la ligne AB (m): de ſorte qu'on n'a pris $m = a$ que pour rendre la conſtruction plus ſimple. Ce que l'on doit toujours obſerver dans la ſuite.

EXEMPLE III.

318. On demande le lieu de l'équation donnée $xx + \frac{2b}{a}yx + \frac{bb}{aa}yy - 2cx + by - \frac{2bc}{a}y = 0$.

Comme c'eſt ici le quarré xx qui eſt délivré de fractions, je choiſis la ſeconde formule * du Lemme; & j'ai par la comparaiſon des termes correſpondans, 1°. $\frac{2n}{m} = -\frac{2b}{a}$; d'où en faiſant $m = a$, je tire $n = -b$. 2°. $\frac{nn}{mm} = \frac{bb}{aa}$; & partant, puiſque $m = a$, on trouve comme ci-deſſus $n = -b$. 3°. $r = c$. 4°. $\frac{2nr - ep}{m} = b - \frac{2bc}{a}$; ce qui donne $p = -\frac{ab}{e}$, en mettant à la place de m, n, r, leurs valeurs a, $-b$, c. 5°. $rr + ps = 0$; parce que dans l'équation donnée il ne ſe trouve point de termes entierement connus, que l'on puiſſe comparer au terme $rr + ps$ de la formule; ce qui donne $s = -\frac{rr}{p} = \frac{ecc}{ab}$, en mettant pour r & p leurs valeurs c & $-\frac{ab}{e}$. Or ces valeurs étant ainſi déterminées, je conſtruis le lieu requis en me ſervant de la conſtruction de la ſeconde formule * du Lemme, & obſervant exactement les articles 311. & 312. de la maniere qui ſuit.

* Art. 308. n. 1.

* Art. 308. n. 2.

Ayant mené par le point fixe A, une ligne indéfinie AQ parallele à PM, je prens ſur cette ligne la partie AB (m) $= a$; & du point B je tire $BE = b = -n$ parallele à AP, & du côté oppoſé à PM, parce que la valeur de n eſt négative; & par les points déterminés A, E, la ligne AE (e) qui eſt donnée. Ayant pris ſur AP la partie AD (r) $= c$ du côté Fig. CLXIX.

de PM, je tire la droite indéfinie DG parallele à AE, sur laquelle je prends la partie $DC (s) = \frac{ccc}{ab}$ du côté de PM. Je
* Art. 161. décris ensuite * du diametre CG (qui ait pour ordonnées des droites paralleles à AP, & pour parametre la ligne $CH =$
* Art. 312. $\frac{ab}{c} = -p$) une Parabole qui s'étende * du côté opposé à celui où s'étend AQ, parce que $p = -\frac{ab}{c}$ qui est une valeur négative. Je dis que la portion OMR de cette Parabole, renfermée dans l'angle PAB, sera le lieu qu'on cherche.

Car ayant mené d'un de ses points quelconques M, la ligne MQ parallele à AP, & qui rencontre les paralleles AE, DG, aux points F, G; les triangles semblables ABE, AQF, donneront ces deux proportions, $AB (a)$. $AE (e)$ :: AQ ou PM (y). AF ou $DG = \frac{ey}{a}$. Et $AB (a)$. $BE (b)$ :: $AQ (y)$. $QF = \frac{by}{a}$. Et par conséquent $GM (QM + FQ - FG) = x + \frac{by}{a} - c$, ou $GM (FG - FQ - QM) = c - \frac{by}{a} - x$, selon que le point M tombe de part ou d'autre du diametre
* Art. 19. CD; & la coupée CG ou $CD - DG = \frac{ccc}{ab} - \frac{ey}{a}$. Or * par la proprieté de la Parabole, $\overline{GM}^2 = CG \times CH$: c'est à dire, en mettant à la place de ces lignes leurs valeurs analytiques $xx + \frac{2b}{a}yx + \frac{bb}{aa}yy - 2cx + by - \frac{2bc}{a}y = o$, qui est l'équation donnée. Donc &c.

REMARQUE.

319. S'IL arrivoit qu'en comparant les termes de l'équation donnée avec ceux de la formule, on trouvât que $p = o$; il est visible que la construction de la Parabole qui en devroit être le lieu, seroit impossible. Mais il faut bien remarquer que l'équation donnée se peut toujours alors abaisser en sorte que son lieu devient une ligne droite ; ce qui se voit par les for-
* Art. 308. mules * du Lemme. Car effaçant, par exemple, dans la premiere les termes où p se rencontre, il vient $yy - \frac{2n}{m}xy + \frac{nn}{mm}xx - 2ry + \frac{2nr}{m}x + rr = o$, de laquelle extrayant la racine quarré, on trouve $y - \frac{nx}{m} - r = o$, ou $y = \frac{nx}{m} + r$, dont le lieu est une ligne droite que l'on construira selon l'article 306. La même chose arrivera de la seconde formule de l'article 308.

EXEMPLE IV.

320. SOIT proposée l'equation $xx - ay = o$, de laquelle il faut trouver le lieu.

Comme c'est ici le quarré xx qui se trouve délivré de fractions, je choisis la seconde formule * du Lemme; & j'ai par la comparaison des termes qui se répondent, 1°. $\frac{2n}{m} = o$, parce que xy ne se trouve point dans la proposée; d'où je tire $n = o$, & par consequent * $m = e$. 2°. $\frac{nn}{mm} = o$, parce que le quarré yy ne s'y trouve pas non plus; d'où je tire encore $n = o$. 3°. $r = o$, parce que l'inconnuë x ne se trouve point au premier degré dans la proposée : c'est pourquoi effaçant dans la formule tous les termes où $\frac{n}{m}$ & r se rencontrent, & mettant pour e sa valeur m; il vient $xx - py + ps = o$, dont il reste à comparer les termes avec ceux qui leur repondent dans la proposée. 4°. La comparaison des termes $-py$ & $-ay$ donnent $p = a$. 5°. Puisque dans la proposée il ne se trouve aucun terme entierement connu que l'on puisse comparer au terme ps; il s'ensuit que $ps = o$, & qu'ainsi $s = o$. Or ces valeurs de n, r, p, s, ainsi déterminés me servent à construire le lieu qu'on demande, ayant égard à la construction de la seconde formule de l'article 308. & à l'article 311. en cette sorte.

* Art. 308. n. 1.

* Art. 311.

* Art. 311.

Fig. CLXX.

Puisque BE (n) $= o$, la ligne AE tombe * sur AQ menée parallelement à PM & du même côté; comme aussi DG, parce que AD (r) $= o$. Or puisque CD (s) $= o$, le point C tombe sur le point D lequel tombe en A comme l'on vient de voir. Je décris donc * une Parabole du diametre AQ, qui ait pour parametre AH (p) $= o$, & pour ordonnées des droites MQ paralleles à AP: je dis que sa portion indéfinie AM renfermée dans l'angle PAQ, est le lieu cherché.

* Art. 161.

Car ayant mené d'un de ses points quelconques M les droites MP, MQ, paralleles à AQ & à AP, on aura par la proprieté * de la Parabole $\overline{QM}^2$ (xx) $= AQ \times AH$ (ay), & partant $xx - ay = o$, qui étoit l'équation proposée. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* Art. 19.

DÉMONSTRATION DU PROBLÊME.

321. Si l'on met dans la formule générale * à la place de m, n, r, s, p, les valeurs que l'on aura trouvées par la comparaison de ces termes avec ceux de l'équation proposée, telle qu'elle

* Art. 308.

puiſſe être, pourvû qu'elle ait les conditions marquées dans le Problême; il eſt clair que cette formule générale ſe changera en la propoſée: & partant que ſi l'on prend auſſi ces valeurs
* *Art.* 308. dans la conſtruction * du Lemme, le lieu de la formule générale ſe changera en celui de l'équation propoſée. Or c'eſt ce qu'on a enſeigné dans le Problême accompagné de ſes deux Remarques, comme les Exemples précédens le font aſſés voir. Donc &c.

LEMME FONDAMENTAL.

Pour la conſtruction des lieux à l'Ellipſe ou au Cercle.

322. FIG. CLXXI. SOIENT encore comme dans la définition premiere deux lignes droites inconnuës & indéterminées AP (x), PM (y); & ſoient de plus des lignes droites données m, n, p, r, s, t. Cela poſé,

On prendra ſur la ligne AP, la partie $AB = m$; & ayant mené les droites $BE = n$, $AD = r$, paralleles à PM, & du même côté, on tirera par le point A la droite AE qui eſt donnée, & que j'appelle e; & par le point D, la droite indéfinie DG parallele à AE, ſur laquelle on prendra la partie $DC = s$ du côté de PM; & de part & d'autre du point C, les parties CK, CL, égales chacune à t. On décrira enſuite
* *Art.* 161. une Ellipſe * du diametre LK $(2t)$, qui ait pour parametre $KH = p$, & pour ordonnées des droites paralleles à PM. Je dis que ſa portion OMR renfermée dans l'angle PAD fait par la ligne AP & par une ligne AD menée par le point fixe A parallelement à PM & du même côté, ſera le lieu de l'équation ou formule générale que voici.

$$yy - \frac{2n}{m}xy + \frac{nn}{mm}xx - 2ry + \frac{2nr}{m}x + rr = 0.$$
$$\phantom{yy - \frac{2n}{m}xy} + \frac{eep}{2mmt} \qquad\qquad - \frac{2eps}{2mt} - \frac{pss}{2t}$$
$$+ \frac{ptt}{2t}$$

Car ayant mené d'un des points quelconques M, de cette portion d'Ellipſe, la ligne MP qui faſſe avec AP l'angle donné ou pris à volonté APM, & qui rencontre les paralleles AE, DG, aux points F, G; les triangles ſemblables ABE, APF, donneront AF ou $DG = \frac{ex}{m}$, & $PF = \frac{nx}{m}$. On aura donc $GM = y - \frac{nx}{m} - r$, & $CG = \frac{ex}{m} - s$. Or par

la proprieté de l'Ellipſe * $KL\ (2t).\ KH\ (p) :: LG \times GK$ ou $\overline{CK}^2 - \overline{CG}^2\ (tt - ss + \frac{2esx}{m} - \frac{eexx}{mm}).\ \overline{GM}^2\ (yy - \frac{2n}{m}xy - 2ry + \frac{nn}{mm}xx + \frac{2nr}{m}x + rr) = \frac{ptt - pss}{2t} + \frac{2epsx}{2mt} - \frac{eepxx}{2mmt}$. Donc &c. *Art. 55. & 41.

S'il arrive que le diametre $KL\ (2t)$ & ſon parametre $KH\ (p)$ ſoient égaux entr'eux, on aura toujours $\overline{GM}^2 = LG \times GK$; d'où il eſt évident ſelon les Elemens de Geometrie, que ſi l'angle CGM eſt droit, l'Ellipſe ſe changera alors en un cercle qui aura pour diametre la ligne KL.

COROLLAIRE.

323. IL eſt clair que les deux quarrés yy & xx ſe trouvent toujours avec les mêmes ſignes dans cette formule; & que lorſque le plan xy s'y rencontre, le quarré $\frac{nn}{mm}$ de la moitié de la fraction $\frac{2n}{m}$ qui multiplie ce plan, doit être moindre que la fraction $\frac{nn}{mm} + \frac{eep}{2mmt}$ qui multiplie le quarré xx.

PROPOSITION III.

Problême.

324. *CONSTRUIRE le lieu d'une équation donnée, dans laquelle les deux quarrés* yy *&* xx *ſe rencontrent avec les mêmes ſignes ſans le plan* xy*, ou avec ce plan, en ſorte que le quarré de la moitié de la fraction qui le multiplie, ſoit moindre que la fraction qui multiplie le quarré* xx. *On ſuppoſe toujours ici que le quarré* yy *ſoit délivré de fractions.*

On comparera les termes de l'équation donnée, avec ceux qui leur répondent dans la formule générale * du Lemme précédent; & on tirera de la comparaiſon de ces termes, des valeurs des quantités m, n, p, r, s, t, par le moyen deſquelles valeurs on décrira comme l'on a enſeigné dans ce Lemme (en obſervant exactement l'art. 311.) une Ellipſe qui ſera le lieu cherché. *Art. 322.

EXEMPLE I.

325. SOIT propoſé de trouver le lieu de cette équation $yy + xy + \frac{1}{2}xx - 2ay + bx + cc = 0$, dans laquelle le quarré

de $\frac{1}{2}$ moitie de la fraction $\frac{2}{2}$ ou 1 qui multiplie xy, est moindre que la fraction $\frac{1}{2}$ qui multiplie xx.

La comparaison de chaque terme de la formule générale
* Art. 322. du Lemme * avec celui qui lui repond dans cette équation, donne 1°. $\frac{2n}{m} = -1$; car n'y ayant ici aucune fraction litterale qui multiplie le plan xy, on le doit considerer comme étant multiplié par l'unité numerique 1 : & partant si l'on fait $m = a$, l'on aura $n = -\frac{1}{2}a$. 2°. $\frac{nn}{mm} + \frac{eep}{2mms} = \frac{1}{2}$; d'où l'on tire $\frac{p}{s} = \frac{mm-2nn}{ee} = \frac{aa}{2ee}$ en mettant pour m, n, leurs valeurs a, $-\frac{1}{2}a$: & par conséquent $p = \frac{aas}{2ee}$. 3°. $r = a$. 4°. $\frac{2nr}{m} - \frac{2eps}{2ms} = b$; d'où en mettant pour m, n, r, $\frac{p}{s}$, leurs valeurs a, $-\frac{1}{2}a$, a, $\frac{aa}{2ee}$, il vient $s = \frac{-2ae-2eb}{a}$. 5°. $rr - \frac{ptt}{2s} + \frac{pss}{2s} = cc$: & partant $tt = ss + \frac{2srr}{p} - \frac{2scc}{p} = ss + 4ee - \frac{4ccee}{aa}$, en mettant pour $\frac{p}{s}$, r, les valeurs $\frac{aa}{2ee}$, a, qu'on leur vient de trouver. Or les valeurs de m, n, r; s, t, p, étant ainsi déterminées, je décris l'Ellip-
* Art. 322. se cherchée en me servant de la construction du Lemme * & de l'article 311. en cette sorte.

FIG. CLXXII. Je prens sur la ligne AP la partie AB (m) $= a$; & ayant mené parallelement à PM & du même côté la ligne AD (r) $= a$, & du côté opposé la droite $BE = \frac{1}{2}a = -n$, parce que $n = -\frac{1}{2}a$ qui est une valeur négative, je tire par le point A la droite AE (e) qui est donnée; & par le point D, la droite DG parallele à AE, sur laquelle je prends la partie $DC = \frac{2ae+2be}{a} = -s$ du côté opposé à PM; & de part & d'autre du point C, les parties CK, CL, égales chacune
* Art. 161. à $t = \sqrt{ss + 4ee - \frac{4ccee}{aa}}$. Je décris ensuite * une Ellipse du diametre LK, qui ait pour ordonnées des droites paralleles à PM, & pour parametre la ligne KH (p) $= \frac{aas}{2ee}$. Je dis que sa portion OMR renfermée dans l'angle PAD, est le lieu de l'équation donnée.

Car ayant mené d'un de ses points quelconques M, la ligne MP qui fasse avec AP l'angle donné ou pris à volonté APM, & qui rencontre les paralleles AE, DG, aux points F, G; les triangles semblables ABE, APF donneront AB (a). AE (e) :: AP (x) AF ou $DG = \frac{ex}{a}$. Et AB (a). BE ($\frac{1}{2}a$) :: AP (x). $PF = \frac{1}{2}x$. On aura donc $GM = y + \frac{1}{2}x - a$; & CG ou $DG + DC = \frac{ex}{a} - s$, puisque $DC = -s$. Or par la proprieté * de l'Ellipse KL ($2t$) KH ($\frac{aas}{2ee}$) :: $LG \times GK$

ou $\overline{CK}^2 - \overline{CG}^2$ $(tt - ss + \frac{2esx}{a} - \frac{eexx}{aa})$. $\overline{GM}^2$ $(yy + xy - 2ay + \frac{1}{4}xx - ax + aa)$. D'où en mettant à la place de $tt - ss$ & de s, leurs valeurs $4ee - \frac{4eecc}{aa}$ & $- \frac{2ae - 2be}{a}$, multipliant ensuite les extrêmes & les moyens, & divisant de part & d'autre par $2t$, l'on retrouve l'équation même proposée. Donc &c.

REMARQUE.

326. S'IL arrive que $ss + 4ee$ soit égale ou moindre que $\frac{4eecc}{aa}$, il est évident que la valeur de t deviendra nulle ou imaginaire ; & qu'ainsi il sera pour lors impossible de construire l'Ellipse qui devroit être le lieu de l'équation donnée. Et comme cette équation renfermeroit nécessairement des contradictions, il s'ensuit qu'il ne pourroit y avoir aucune ligne qui en pût être le lieu ; c'est à dire que toutes les valeurs de l'inconnuë y qui devroient répondre à toutes les valeurs tant vraies que fausses de l'autre inconnuë x, seroient toutes imaginaires.

Ceci se voit clairement dans la formule générale * du Lemme qui, en transposant quelques termes, devient $yy - \frac{2n}{m}xy - 2ry + \frac{nn}{mm}xx + \frac{2nr}{m}x + rr = \frac{ptt - pss}{2t} + \frac{2pesx}{2mt} - \frac{eepxx}{2mmtt}$, dans laquelle équation le premier membre est le quarré de $y - \frac{n}{m}x - r$; & le second, le quarré de t moins le quarré de $s - \frac{ex}{m}$, multiplié par la fraction $\frac{p}{2t}$. Or il est visible que si la valeur du quarré tt est nulle ou négative, la valeur de ce second membre sera négative ; & qu'ainsi l'on aura dans ces deux cas un quarré, sçavoir le premier membre, égal à une valeur négative ; ce qui est une contradiction manifeste. * Art. 322.

EXEMPLE II.

327. ON demande le lieu de l'équation $yy + \frac{b}{a}xy + xx + cy + fx - ag = 0$, dans laquelle on suppose suivant l'art. 323. que $\frac{bb}{4aa}$ est moindre que la fraction $\frac{1}{1}$ ou 1 qui multiplie le quarré xx ; c'est à dire que b est moindre que $2a$.

La comparaison des termes de la formule * générale avec ceux qui leur répondent dans l'équation proposée, donne * Art. 322.
1°. $\frac{2n}{m} = - \frac{b}{a}$; d'où en faisant $m = a$, on tire $n = - \frac{1}{2}b$
2°. $\frac{nn}{mm} + \frac{eep}{2mmt} = 1$; d'où en mettant pour m, n, leurs

valeurs a, $-\frac{1}{2}b$, l'on tire $\frac{p}{t} = \frac{4aa - bb}{2ee}$: & partant $p = \frac{4aat - bbt}{2ee}$. 3°. $r = -\frac{1}{2}c$. 4°. $s = \frac{bce - 2afe}{4aa - bb}$. 5°. $t = \sqrt{ss + \frac{ccee + 4agee}{4aa - bb}}$. Ce qui fournit cette construction.

FIG.CLXXIII. Ayant pris sur la ligne droite indéfinie AP la partie AB $(m) = a$, & mené parallelement à PM & du côté opposé les droites $BE = \frac{1}{2}b = -n$, $AD = \frac{1}{2}c = -r$, on tirera par le point A la droite AE (e) qui est donnée, & par le point D la droite DG parallele à AE, sur laquelle on prendra la partie DC $(s) = \frac{bce - 2afe}{4aa - bb}$ du côté de PM, si bc surpasse $2af$, comme on le suppose ici; & du côté opposé, s'il est moindre; ensuite on prendra de part & d'autre du point C, les parties CK & CL égales chacune à $t = \sqrt{ss + \frac{ccee + 4agee}{4aa - bb}}$.
*Art. 161. Cela fait, on décrira * une Ellipse du diametre LK $(2t)$ qui ait pour ordonnées des droites paralleles à PM, & pour parametre une ligne KH $(p) = \frac{4aat - bbt}{2ee}$. Je dis que sa portion OR sera le lieu de l'équation proposée.

Car ayant mené d'un de ses points quelconques M, la droite MP qui fasse avec AP l'angle donné ou pris à volonté APM, & qui rencontre les paralleles AE, LK; aux points F, G; on aura $PF = \frac{bx}{2a}$, & AF ou $DG = \frac{ex}{a}$; ce qui donnera MG ou $MP + PF + FG = y + \frac{bx}{2a} + \frac{1}{2}c$, & $CG = \frac{ex}{a}$
*Art. 55. & 41. $- s$ ou $s - \frac{ex}{a}$. Or par la proprieté * de l'Ellipse LK $(2t)$. KH $(\frac{4aat - bbt}{2ee})$ :: $LG \times GK$ $(tt - ss + \frac{2esx}{a} - \frac{eexx}{aa})$. $\overline{GM}^2$ $(yy + \frac{b}{a}xy + cy + \frac{bbxx}{4aa} + \frac{bc}{2a}x + \frac{1}{4}cc)$. Ce qui (en mettant pour $tt - ss$ & pour s leurs valeurs $\frac{ccee + 4agee}{4aa - bb}$ & $\frac{bce - 2afe}{4aa - bb}$, multipliant ensuite les extrêmes & les moyens, & divisant par $2t$) donne l'équation même proposée.

Il est à propos de remarquer que si l'angle AEB étoit droit, l'angle CGM le seroit aussi ; & le diametre LK $(2t)$ seroit égal au parametre KH $(\frac{4aat - bbt}{2ee})$, puisque $ee = aa - \frac{1}{4}bb$ à cause du triangle rectangle AEB. D'où l'on voit que l'Ellipse deviendroit alors un cercle qui auroit pour rayon la droite CK ou CL $(t) = \sqrt{ss + \frac{1}{4}cc + ag}$, & que DC $(s) = \frac{bc - 2af}{4e}$; ce qui rend la construction beaucoup plus simple.

EXEMP.

EXEMPLE III.

328. Soit proposé de trouver le lieu de l'équation $yy + xx - ax = o$.

Je compare les termes de la formule * générale, avec ceux qui leur répondent dans l'équation donnée; & j'ai 1°. $\frac{2n}{m} = o$, parce que le terme xy manquant, on le doit considerer comme étant multiplié par zero: d'où je tire $n = o$: & partant $m = e$: 2°. $\frac{nn}{mm} + \frac{eep}{2mmt} = 1$; c'est à dire, $\frac{p}{2t} = 1$ en mettant pour n & m leurs valeurs o & e: & partant $p = 2t$. 3°. $r = o$; parce que l'inconnuë y ne se trouvant point au premier degré dans l'équation donnée, on la doit aussi considerer comme étant multipliée par zero: c'est pourquoi effaçant dans la formule generale * tous les termes où $\frac{n}{m}$ & r se rencontrent, & mettant pour e & $\frac{p}{2t}$ leurs valeurs m & 1, elle se changera en celle-ci $yy + xx - 2sx - tt + ss = o$, dont il reste à comparer les termes avec ceux de la proposée. 4°. $2s = a$; & partant $s = \frac{1}{2}a$. 5°. $ss - tt = o$; puisqu'il n'y a point de termes entierement connus dans l'équation donnée: & partant $tt = ss = \frac{1}{4}aa$; & en extrayant de part & d'autre la racine quarrée, $t = \frac{1}{2}a$. Or ces valeurs étant ainsi déterminées, je construis le lieu en cette sorte. * Art. 322. * Art. 322.

Puisque BE $(n) = o$, il s'ensuit que AE tombe sur AP, laquelle tombe aussi sur DG, puisqu'on a encore AD $(r) = o$; de sorte que le point D tombe en A. C'est pourquoi prenant sur AP, la partie AC $(s) = \frac{1}{2}a$ du côté de PM; & de part & d'autre du point C, les parties CK, CL; égales chacune à $t = \frac{1}{2}a$ (le point L tombe ici sur le point A); on décrira * du diametre AK qui ait pour ordonnées des droites paralleles à PM, & pour parametre la ligne KH $(p) = 2t = a$, une Ellipse qui sera le lieu cherché. FIG. CLXXIV. * Art. 161.

Car ayant mené d'un de ses points quelconques M la droite MP qui fasse avec AP l'angle donné ou pris à volonté APM, on aura * AK (a). KH (a) :: $AP \times PK$ $(ax - xx)$. $\overline{PM}^2$ (yy). Ce qui donne $yy + xx - ax = o$. * Art. 55. & 41.

Il est évident que si l'angle APM est droit, l'Ellipse devient alors un cercle qui a pour diametre la ligne $AK = a$.

REMARQUE.

339. Il peut arriver deux differens cas, où le lieu de l'équation donnée est un cercle.

Premier cas. Lorsque les quarrés yy & xx se trouvent tous deux avec les mêmes signes & sans fraction dans une équation, où le plan xy se trouve aussi; & que de plus l'angle *AEB* est droit (ce qui arrive lorsqu'ayant mené *AF* perpendiculaire sur *PM* la raison de *PF* à *AP*, qui est la même que celle de *BE* à *AB* est exprimée par la moitié de la fraction qui multiplie le plan xy) le lieu de cette équation sera toujours un cercle comme l'on a déja vû dans l'article 327, & la raison en est évidente par la formule generale. Car l'on aura pour la comparaison des termes correspondans où se trouve le quarré xx, cette égalité $\frac{nn}{mm} + \frac{eep}{2mmr} = 1$; d'où l'on tire $\frac{p}{2r} = \frac{mm-nn}{ee} = 1$, puisque à cause du triangle rectangle *AEB* le quarré $mm = nn + ee$. Or l'angle *AEB* étant droit, l'angle *CGM* que fait le diametre *LK* avec ses ordonnées sera aussi droit; & par conséquent puisque le diametre *LK* est égal à son parametre *KH*, il s'ensuit que l'Ellipse devient alors un cercle.

Second cas. Lorsque les quarrés yy & xx se trouvent tous deux avec les mêmes signes & sans fraction dans une équation, où le plan xy ne se rencontre pas, & que de plus l'angle *APM* est droit: son lieu sera toujours un cercle, comme l'on vient de voir dans l'article 328; & cela se prouve par le moyen de la formule generale. Car puisque le plan xy ne se trouve point dans l'équation donnée, la fraction $\frac{2n}{m}$ de la formule sera nulle ou zero; & partant $BE\ (n) = o$, & $m = e$. D'où l'on voit. 1°. Que le diametre *LK* est parallele à la ligne *AP*, & qu'ainsi l'angle *CGM* qu'il fait avec ses ordonnées étant égal à l'angle *APM* sera droit. 2°. Que la fraction $\frac{nn}{mm} + \frac{eep}{2mmr}$ qui multiplie le quarré xx dans la formule devient $\frac{p}{2r}$, & qu'ainsi on aura $\frac{p}{2r} = 1$: c'est à dire que le diametre *LK* sera égal à son parametre *KH*. L'Ellipse qui est le lieu de l'équation donnée sera donc alors un cercle. Or comme alors la formule generale se change en celle-ci

$$\begin{aligned} yy + xx - 2ry - 2sx + rr &= o, \\ -tt& \\ +ss& \end{aligned}$$

on pourra, si l'on veut abreger le calcul, en se servant d'abord de cette formule, pour trouver par la comparaison de ses termes avec ceux de la proposée, les valeurs de r, s, t, qui servent à décrire le cercle qui en est le lieu.

LEMME FONDAMENTAL.

Pour la construction des lieux à l'Hyperbole par rapport à ses diametres.

330. Les mêmes choses étant posées que dans le Lemme précédent pour l'Ellipse, on décrira * du diametre LK $(2t)$ qui ait pour parametre KH (p), & pour ordonnées des droites paralleles à PM, une Hyperbole ou deux Hyperboles opposées. Je dis que sa portion OM, ou leurs portions renfermées dans l'angle PAD fait par la ligne AP & par une ligne AD menée par le point fixe A parallelement à PM & du même côté, sera le lieu de cette équation ou formule. Fig. CLXXV. CLXXVI. * Art. 161.

$$\begin{array}{l} yy - \frac{2n}{m}xy + \frac{nn}{mm}xx - 2ry + \frac{2nr}{m}x + rr = 0. \\ \qquad\qquad - \frac{eep}{2mmt}xx \qquad\qquad + \frac{2eps}{2mt}x \pm \frac{ptt}{2t} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad - \frac{pss}{2t} \end{array}$$

dans laquelle on doit observer qu'il y a $+\frac{ptt}{2t}$ lorsque le diametre LK est un premier diametre, & $-\frac{ptt}{2t}$ lorsque c'est un second.

Car ayant mené d'un de ses points quelconques M la ligne MP, qui fasse avec AP l'angle donné ou pris à volonté APM, & qui rencontre les paralleles AE, DG, aux points F, G, on aura par la proprieté de l'Hyperbole * KL $(2t)$. KH (p) :: $\overline{CG}^2 \pm \overline{CK}^2$ $(\frac{eexx}{mm} - \frac{2esx}{m} + ss \pm tt)$. $\overline{GM}^2 = \frac{peexx}{2mmt} - \frac{2epsx}{2mt} + \frac{pss}{2t} \pm \frac{ptt}{2t} = yy - \frac{2n}{m}xy - 2ry + \frac{nn}{mm}xx + \frac{2nr}{m}x + rr$. Donc &c. * Art. 81. & 118.

S'il arrive que le diametre KL $(2t)$ & son parametre KH (p) soient égaux entr'eux; l'Hyperbole sera équilatere.

COROLLAIRE.

331. Il est clair, 1°. Que les deux quarrés yy & xx se trouvent toujours avec differens signes dans cette formule, lorsque le plan xy ne s'y rencontre point; ou bien lorsqu'il s'y trouve, &

que $\frac{eep}{2mmt}$ surpasse $\frac{nn}{mm}$. 2°. Qu'ils s'y peuvent trouver avec les mêmes signes, mais avec ces conditions que le plan xy s'y rencontre, & que le quarré $\frac{nn}{mm}$ de la moitié de la fraction qui le multiplie, soit plus grand que la fraction $\frac{nn}{mm} - \frac{eep}{2mmt}$ qui multiplie le quarré xx.

PROPOSITION IV.

Problême.

332. *CONSTRUIRE le lieu d'une équation donnée, dans laquelle, ou les deux quarrés* yy *&* xx *se rencontrent avec differens signes, ou bien avec les mêmes signes, mais avec ces deux conditions que le plan* xy *s'y trouve, & que le quarré de la moitié de la fraction qui le multiplie soit plus grand que la fraction qui multiplie le quarré* xx. *On suppose encore ici que le quarré* yy *soit délivré de fractions.*

On construit l'Hyperbole qui en est le lieu, comme l'on vient de faire l'Ellipse dans le Problême précédent. Les Exemples qui suivent le feront voir.

EXEMPLE I.

333. SOIT $yy + \frac{2b}{a}xy + \frac{f}{a}xx + 2cy - 2gx - bb = 0$, l'équation dont il faut construire le lieu, & dans laquelle on suppose que le quarré $\frac{bb}{aa}$ surpasse $\frac{f}{a}$.

Je compare les termes de cette équation avec ceux qui leur répondent dans la formule du Lemme; & j'ai 1°. $\frac{2n}{m} = -\frac{2b}{a}$, & partant si l'on fait $m = a$, on aura $n = -b$. 2°. $\frac{eep}{2mmt} - \frac{nn}{mm} = -\frac{f}{a}$, donc $\frac{p}{2t} = \frac{bb - af}{ee}$, & $p = \frac{2bbt - 2aft}{ee}$. 3°. $r = -c$. 4°. $\frac{2nr}{m} + \frac{2eps}{2mt} = -2g$, d'où en mettant pour m, n, r, $\frac{p}{2t}$ les valeurs que l'on vient de trouver, on tire $s = \frac{-bce - age}{bb - af}$. 5°. $\mp tt = ss - \frac{2rrt - 2hht}{p} = ss - \frac{eecc - eebb}{bb - af}$, sçavoir $+ tt$ lorsque le quarré ss surpasse $\frac{eecc + eebb}{bb - af}$, & $- tt$ lorsqu'il est moindre, parce que le quarré tt doit être positif; ce qui fait deux differens cas. Or les valeurs de m, n, r, s, t, p, étant ainsi determinées, je construis le lieu en me reglant sur la construction du Lemme, de la maniere qui suit.

FIG. CLXXVII CLXXVIII. Ayant pris sur AP, la partie $AB = a$, & mené paralle-

lement à PM & du côté opposé les droites $BE = b = -n$, $AD = c = -r$, je tire par les points A, E, la droite AE (e) qui est donnée, & par le point D la droite indéfinie DG parallele à AE sur laquelle je prends la partie $DC = \frac{eag + ebc}{bb - af} = -s$ du côté opposé à PM, & de part & d'autre du point C les parties CL, CK, égales chacune à $t = \sqrt{ss - \frac{eecc - eebh}{bb - af}}$ ou $\sqrt{\frac{eecc + eehh}{bb - af} - ss}$, selon que ss est plus grand ou moindre que $\frac{eecc + eehh}{bb - af}$. Cela fait, du diametre LK (qui ait pour ordonnées des droites paralleles à PM, & pour parametre la ligne KH (p) $= \frac{2bbt - 2aft}{ee}$) je décris une Hyperbole, en observant que LK (*fig.* 177.) doit être un premier diametre dans le premier cas, & un second (*fig* 178.) dans le dernier. Je dis que sa portion OM sera le lieu requis.

Car ayant mené d'un de ses points quelconques M une parallele MP à AD, laquelle rencontre les lignes AB, AE, DG, aux points P, F, G; on aura $PF = \frac{bx}{a}$, & AF ou $DG = \frac{ex}{a}$. Et par conséquent $MG = y + \frac{bx}{a} + c$, CG ou $DG + CD = \frac{ex}{a} - s$, puisque $CD = -s$. Or par la proprieté de l'Hyperbole, LK ($2t$). KH ($\frac{2bbt - 2aft}{ee}$) :: $\overline{CG}^2 \pm \overline{CK}^2$ ($\frac{eexx}{aa} - \frac{2esx}{a} + ss \pm tt$). $\overline{GM}^2$ ($yy + \frac{2b}{a}xy + 2cy + \frac{bb}{aa}xx + \frac{2bc}{a}x + cc$); ce qui, en mettant pour $ss \pm tt$ & s leurs valeurs $\frac{eecc + eehh}{bb - af}$ & $\frac{-bce - age}{bb - af}$, multipliant les extrêmes & les moyens, & divisant par $2t$, donne l'équation proposée. Donc &c.

REMARQUE.

334. S'IL arrive que $ss = \frac{eecc + eehh}{bb - af}$; il est clair que la valeur de tt devient nulle ou zero, & qu'ainsi la construction de l'Hyperbole devient impossible. Mais il faut bien remarquer alors que l'équation proposée s'abaisse toujours, en sorte que son lieu, qui devroit être une ou deux Hyperboles opposées, devient une ou deux lignes droites. En effet dans nôtre exemple on a réduit l'équation donnée à cette proportion $ee . bb - af$ :: $\frac{eexx}{aa} - \frac{2esx}{a} + ss \pm tt . yy + \frac{2b}{a}xy + \frac{bb}{aa}xx + 2cy + \frac{2bc}{a}x$

$+ cc$; d'où, en effaçant tt qui est nul, multipliant les extrêmes & les moyens, & extrayant de part & d'autre la racine quarrée, l'on tire $ey + \frac{ebx}{a} + ec = \frac{ex}{a} - s\sqrt{bb - af}$, c'est à dire en mettant pour $-s$ sa valeur $\frac{bce + age}{bb - af}$, & divisant de part & d'autre par e, cette équation $y + \frac{bx}{a} + c = \frac{x\sqrt{bb - af}}{a} + \frac{ag + bc}{\sqrt{bb - af}}$ ou $y = \frac{-b + \sqrt{bb - af}}{a}x + \frac{ag + bc}{\sqrt{bb - af}} - c$, qui en faisant $\frac{n}{m} = \frac{b - \sqrt{bb - af}}{a}$, & $p = \frac{ag + bc}{\sqrt{bb - af}} - c$, se change en cette autre $y = p - \frac{n}{m}x$ dont le lieu est une ligne droite que l'on construit selon l'article 306.

La raison de ceci est évidente par la formule generale du Lemme; car effaçant dans cette formule le terme $+ \frac{ptt}{2s}$ qui renferme le quarré tt que l'on suppose égal à zero ou nul, elle se change en transposant certains termes, & extrayant les racines quarrées en cette autre $y - \frac{n}{m}x - r = \frac{ex}{m} - s\sqrt{\frac{p}{2s}}$ ou $s - \frac{ex}{m}\sqrt{\frac{p}{2s}}$ où les inconnuës x & y ne sont plus qu'au premier degré, & dont le lieu par conséquent devient des lignes droites.

EXEMPLE II.

335. ON demande le lieu de l'équation donnée $yy - xx + 2ay + ax = o$.

La comparaison des termes correspondans donne 1°. $\frac{2n}{m} = o$, parce que le terme xy ne se trouve point dans la proposée; d'où l'on tire $n = o$, & par conséquent $m = e$. 2°. $\frac{p}{2s} = 1$, & partant $p = 2s$. 3°. $r = -a$. 4°. $\frac{2ps}{2s} = a$, d'où l'on tire $s = \frac{1}{2}a$. 5°. $rr + \frac{ptt}{2s} - \frac{pss}{2s} = o$, & ainsi $+ tt = ss - \frac{2rrs}{p} = -\frac{3}{4}aa$ en mettant pour r, $\frac{2s}{p}$, s leurs valeurs $-a$, 1, $\frac{1}{2}a$; d'où je connois qu'il faut prendre dans le dernier terme de la formule $-tt$ & non pas $+tt$, afin que la valeur de tt soit positive. Je construis ensuite le lieu en cette sorte.

FIG. CLXXIX. Puisque AD $(r) = -a$, je mene par le point A parallelement à PM & du côté opposé la ligne $AD = a$, & puisque BE $(n) = o$, je tire par le point D la droite DG parallele à AP, sur laquelle je prends la partie DC $(s) = \frac{1}{2}a$ du

côté de PM, & de part & d'autre du point C les parties CL, CK, égales chacune à $t = \sqrt{\frac{1}{4}aa}$. Ensuite du second diametre LK (parce qu'on a pris $-tt$ dans le dernier terme de la formule) qui ait pour ordonnées des droites paralleles à PM, & pour parametre la droite $KH(p) = 2t = LK$, je décris une Hyperbole. Je dis que sa portion OM sera le lieu qu'on cherche.

Car ayant mené d'un de ses points quelconques M une parallele MP à AD, qui rencontre les droites AP, DG, aux points P, G; on aura $MG = y + a$, CG ou $DG - DC = x - \frac{1}{2}a$, & par la proprieté de l'Hyperbole $LK\ (2t)\ KH\ (2t) :: \overline{CG}^2 + \overline{CK}^2\ (xx - ax + \frac{1}{4}aa + tt).\ \overline{GM}^2\ (yy + 2ay + aa)$; ce qui donne en mettant pour tt sa valeur $\frac{1}{4}aa$, l'équation même proposée $yy + 2ay - xx + ax = 0$.

Il est évident que l'Hyperbole est équilatere.

REMARQUE.

336. LORSQUE les deux quarrés yy & xx se trouvent avec differens signes & sans fraction dans une équation, où le plan xy ne se rencontre point; son lieu sera toujours une Hyperbole équilatere. Car la fraction $\frac{2n}{m}$ de la formule sera nule ou zero; & partant $BE\ (n) = o$, & $m = e$. D'où il suit que la fraction $\frac{nn}{mm} - \frac{eep}{2mmt}$ qui multiplie le quarré xx dans la formule devient $-\frac{p}{2t}$; & qu'ainsi on aura $-\frac{p}{2t} = 1$, c'est à dire, que le diametre LK sera égal à son parametre KH, ou, ce qui est la même chose, que l'Hyperbole sera équilatere. Or comme la formule generale se change alors en celle-ci

$$yy - xx - 2ry + 2sx + rr = o,$$
$$\mp tt$$
$$- ss$$

il s'ensuit qu'on peut s'en servir d'abord pour trouver les valeurs de r, s, t, qui servent à construire l'Hyperbole équilatere qui est le lieu de l'équation donnée; ce qui abrege le calcul.

LEMME FONDAMENTAL.

Pour la construction des lieux à l'Hyperbole entre ses Asymptotes.

337. SOIENT comme dans la définition premiere, deux lignes inconnuës & indéterminées AP (x), PM (y) qui fassent entr'elles un angle donné ou pris à volonté APM; & soient de plus des lignes droites données m, n, p, r, s. Cela posé.

Fig. CLXXX. 1°. On prendra sur la ligne AP, la partie $AB = m$; & ayant mené les droites $BE = n$, $AD = r$, paralleles à PM, & du même côté; on tirera par le point A la droite AE qui est donnée, & que j'appelle e, & par le point D la droite indéfinie DG parallele à AE, sur laquelle ayant pris les parties $DC = s$, $CK = e$ du côté que s'étend AP, on menera parallelement à PM & du même côté la droite indéfinie CL, & *Art. 130. 131. la ligne $KH = p$. On décrira ensuite * entre les Asymptotes CL, CK, une Hyperbole qui passe par le point H. Je dis qu'elle sera le lieu de l'équation ou formule.

$$\begin{array}{l} xy - \frac{n}{m}xx - \frac{ms}{e}y + \frac{ns}{e}x + \frac{mrs}{e} = 0. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad - rx \quad\; - mp \end{array}$$

Car $GM = y - \frac{nx}{m} - r$, $CG = \frac{ex}{m} - s$, & par la pro- *Art. 101. prieté de l'Hyperbole * $CG \times GM$ ($\frac{exy}{m} - sy - \frac{enxx}{mm} + \frac{nsx}{m} - \frac{erx}{m} + rs$) $= CK \times KH$ (ep); ce qui donne en délivrant le terme xy de fractions, & mettant par ordre tous les termes, la même équation $xy - \frac{n}{m}xx - \frac{ms}{e}y$ &c. que cy-dessus.

Fig. CLXXXI. 2°. On menera par le point fixe A, une ligne indéfinie AQ parallele à PM & du même côté; & ayant pris sur cette ligne la partie $AB = m$, on tirera $BE = n$ parallele à AP & du même côté, & par les points déterminés A, E, la ligne AE que j'appelle e; & ayant pris sur AP la partie $AD = r$ du côté de PM, on tirera la droite indéfinie DG parallele à AE, sur laquelle on prendra les parties $DC = s$, $CK = e$ du côté que s'étend PM, & on menera parallelement à AP & du même côté, la droite indéfinie CL & la ligne $KH = p$. *Art. 130. 131. On décrira ensuite * entre les asymptotes CL, CK, une Hyperbole qui passe par le point H. Je dis qu'elle sera le lieu de cette seconde équation ou formule

$$\begin{array}{l} xy - \frac{n}{m}yy - \frac{ms}{e}x + \frac{ns}{e}y + \frac{mrs}{e} = 0. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad - ry \quad\; - mp \end{array}$$

Car

Car ayant mené d'un de ses points quelconques M, la ligne MQ parallele à AP, & qui rencontre les paralleles AE, DG, aux points F, G; les triangles semblables ABE, AQF, donneront $AB\ (m) . AE\ (e) :: AQ$ ou $PM\ (y) . AF$ ou $DG = \frac{ey}{m}$, & $AB\ (m) . BE\ (n) :: AQ\ (y) . QF = \frac{ny}{m}$. Et par conséquent $GM = x - \frac{ny}{m} - r$, $CG = \frac{ey}{m} - s$. Or par la proprieté de l'Hyperbole $CG \times GM = CK \times KH$, ce qui donne, en mettant pour ces lignes leurs valeurs analytiques, & délivrant le terme xy de fractions, la même seconde formule que cy-dessus. Donc &c.

COROLLAIRE.

338. Il est clair 1°. Que le terme xy se rencontre toujours dans ces deux formules, puisque n'étant multiplié par aucune fraction, on ne peut point la supposer nulle pour le faire évanoüir. 2°. Qu'il ne s'y peut rencontrer que l'un des quarrés xx ou yy, lequel s'évanoüit si la fraction $\frac{n}{m}$ qui le multiplie est nulle.

PROPOSITION V.

Problême.

339. *TROUVER le lieu d'une équation donnée dans laquelle le plan* xy *se rencontre, sans aucun des quarrés* xx *&* yy, *ou seulement avec l'un des deux.*

On délivrera le plan xy de fractions, & on comparera les termes de l'équation donnée avec ceux qui luy répondent dans la premiere formule lorsque le quarré xx s'y rencontre, & avec ceux de la seconde lorsque c'est le quarré yy, & enfin avec celle des deux qu'on voudra lorsque pas un des quarrés xx & yy ne s'y trouve. On tirera ensuite de la comparaison de ces termes, des valeurs des quantités m, n, p, r, s, par le moyen desquelles on décrira une Hyperbole entre ses asymptotes comme l'on a enseigné dans le Lemme précédent, en observant toujours de mener ou de prendre du côté opposé à AP & à PM les lignes dont les valeurs sont négatives. Les Exemples qui suivent éclairciront ces regles.

EXEMPLE I.

340. On demande le lieu de $xy - \frac{b}{a}xx - cy = o$.

Comme c'eſt le quarré xx qui ſe rencontre dans l'équation donnée, je choiſis la premiere formule, & j'ai par la comparaiſon de ſes termes avec ceux de la propoſée, 1°. $\frac{n}{m} = \frac{b}{a}$, d'où en faiſant $m = a$, je tire $n = b$. 2°. $\frac{ms}{e} = c$, & partant $s = \frac{ec}{a}$. 3°. $\frac{ns}{a} - r = o$, parce que l'inconnuë x ne ſe trouve point au premier degré dans l'équation donnée, & partant $r = \frac{bc}{a}$. 4°. $\frac{mrs}{e} - mp = o$, parce qu'il ne ſe trouve point de termes entierement connus; & partant $p = \frac{rs}{e} = \frac{bcc}{aa}$. Or comme les valeurs de $AP\ (m)$, $BE\ (n)$, $CD\ (s)$, $AD\ (r)$, $KH\ (p)$ ſont toutes poſitives, je conſtruis le lieu préciſément comme dans le Lemme (*fig.* 180.) en obſervant de prendre pour les lignes les valeurs que l'on vient de trouver.

FIG. CLXXX. Car $GM = y - \frac{bx}{a} - \frac{bc}{a}$, CG ou $DG - DC = \frac{bx - ec}{a}$, & par la proprieté de l'Hyperbole $CG \times GM = CK \times KH$ c'eſt à dire, en mettant les valeurs analytiques, l'équation même donnée. Donc &c.

EXEMPLE II.

341. Soit $xy + \frac{b}{a}yy - cy - ff = o$, l'équation dont il faut conſtruire le lieu.

Comme c'eſt le quarré yy qui ſe trouve dans l'équation donnée, je choiſis la ſeconde formule, & j'ai par la comparaiſon de ſes termes avec ceux de la propoſée, 1°. $\frac{n}{m} = -\frac{b}{a}$, & ſi l'on fait $m = a$, on aura $n = -b$. 2°. $\frac{mn}{e} = o$, & partant $s = o$. 3°. $r = c$. 4°. $mp = ff$, & partant $p = \frac{ff}{a}$. Ce qui donne la conſtruction ſuivante.

FIG. CLXXXII. Ayant mené par le point fixe A, une ligne indéfinie AQ parallele à PM & du même côté, & ayant pris ſur cette ligne, la partie $AB\ (m) = a$, je tire $BE = b = -n$ parallele à AP & du côté oppoſé, & par les points déterminés A, E, la ligne $AE\ (e)$. Je prends ſur AP, la partie $AD\ (r) = c$ du côté de PM, & je tire la droite indéfinie DG parallele à AE, & comme les points D, C, tombent l'un ſur l'autre, parce que $DC\ (s) = o$, je prends ſur cette ligne la partie $DK = e$ du côté que s'étend PM, & ayant mené parallelement à AP & du

même côté la ligne $KH\ (p) = \frac{ff}{a}$, & la droite indéfinie DL qui tombe ici sur AP, je décris entre les Asymptotes DL, DK, une Hyperbole qui passe par le point H. Je dis qu'elle sera le lieu requis.

Car ayant mené d'un de ses points quelconques M, la droite MQ parallele à AP & qui rencontre les paralleles AE, DG, aux points F, G, on aura GM ou $MQ + QF - FG = x + \frac{by}{e} - c$, DG ou $AF = \frac{ey}{a}$, & partant $DG \times GM = \frac{exy}{a} + \frac{ebyy}{ae} - \frac{ecy}{a} = CK \times KH\ (\frac{eff}{a})$. Ce qui donne, en délivrant le terme xy de fractions, l'équation proposée $xy + \frac{b}{a}yy - cy - ff = 0$.

REMARQUE.

342. Si l'on prend pour l'arbitraire $AB\ (m)$ une autre valeur que a, celles de $CK\ (e)$ & de $KH\ (p)$ changeront, mais les valeurs du rectangle $CK \times KH\ (ep)$, & des droites $AD\ (r)$, $CD\ (s)$ demeureront toujours les mêmes ; car elles ne renferment dans leurs expressions que les rapports $\frac{n}{m}$, $\frac{n}{e}$, $\frac{m}{e}$, qui ne changent point, puisque dans le triangle ABE l'angle ABE est donné, & la raison $\frac{n}{m}$ (qui dans cet exemple est $\frac{b}{a}$) du côté $AB\ (m)$ au côté $BE\ (n)$. Or comme l'Hyperbole qui doit passer par le point H, sera toujours la même *, telle grandeur que l'on puisse donner à $CK\ (e)$ & à $KH\ (p)$, pourvû que le rectangle $CK \times KH$ demeure le même ; il s'ensuit que l'on construira toujours la même Hyperbole, telle grandeur que l'on puisse prendre pour l'arbitraire $AB\ (m)$. * Art. 301.

EXEMPLE III.

343. Il faut construire le lieu de l'équation donnée $xy - ay + bx + cc = 0$.

Comme pas un des quarrés xx & yy ne se trouve dans l'équation proposée, je puis prendre indifferemment l'une ou l'autre des deux formules, par exemple, la premiere, de laquelle comparant les termes avec ceux de la proposée, j'ai 1°. $\frac{n}{m} = 0$, & partant $n = 0$, & $m = e$; je fais $m = a$. 2°. $\frac{ms}{e}$ ou $s = a$. 3°. $r = -b$, puisque $\frac{ns}{e} = 0$. 4°. $rs - mp = cc$, & partant $p = -b - \frac{cc}{a}$. Or ces valeurs de m, n, r, s, p, étant ainsi déterminées, je construis le lieu de la maniere qui suit.

FIG. CLXXXIII. Puisque $AD\ (r) = -b$, je mene parallelement à PM & du côté opposé la ligne $AD = b$; & puisque $BE\ (n) = o$, je tire la droite indéfinie DG parallele à AP sur laquelle ayant pris les parties $DC\ (s) = a$, $CK\ (e) = m = a$ du côté que s'étend AP, je tire la droite indéfinie CL, & la ligne $KH = b + \frac{cc}{a} = -p$ parallele à PM & du côté opposé. Je décris ensuite l'Hyperbole opposée à celle qui ayant pour Asymptotes les droites CL, CK, passe par le point H. Je dis que sa portion indéfinie OM renfermée dans l'angle PAS, faite par la droite indéfinie AP & par la ligne AS menée parallelement à PM & du même côté, sera le lieu cherché.

Car GM ou $PG + PM = y + b$ & CG ou $CD - DG = a - x$; & par conséquent $CG \times GM = ay - xy + ab - bx = CK \times KH\ (ab + cc)$; ce qui, en effaçant de part & d'autre le rectangle ab, & transposant à l'ordinaire, donne $xy - ay + bx + cc = o$ qui est l'équation proposée.

Il auroit été inutile dans cet Exemple de décrire l'Hyperbole qui passe par le point H; car aucun de ses points ne pourroit tomber dans l'angle PAS, où l'on suppose que doivent tomber les points M.

REMARQUE.

344. S'IL arrive qu'en comparant les termes de la formule avec ceux de l'équation donnée, on trouvât que $p = o$; on voit qu'il seroit alors impossible de décrire l'Hyperbole qui en devroit être le lieu, puisque sa puissance qui est égale au rectangle pe seroit nulle. Mais alors l'équation se pourroit toujours abaisser, en sorte que son lieu deviendroit une ligne droite; car effaçant par exemple dans la premiere formule du Lemme le terme mp, elle devient $xy - \frac{n}{m}xx - \frac{ms}{e}y + \frac{ns}{e}x - rx + \frac{mrs}{e} = o$, qui étant divisée par $\frac{ex}{m} - s$ donne $y - \frac{nx}{m} - r = o$, dont le lieu * est une ligne droite.

* Art. 306.

PROPOSITION VI.

Problême.

345. *CONSTRUIRE tout lieu du second degré, son équation étant donnée.*

Tous les termes de l'équation étant mis d'un même côté,

en ſorte que l'un des membres ſoit zero, je diſtingue deux differens cas.

Premier cas. Lorſque le plan xy ne ſe trouve point dans l'équation donnée. 1°. S'il n'y a que l'un des quarrés yy ou xx, le lieu ſera une * Parabole. 2°. Si les deux quarrés yy & xx ſ'y trouvent avec les mêmes ſignes, le lieu ſera une * Ellipſe ou un cercle. 3°. Si ces deux quarrés ſ'y rencontrent avec differens ſignes, le lieu ſera une * Hyperbole ou deux Hyperboles oppoſées rapportées à ſes diametres.

* *Art.* 310.
* *Art.* 324.
* *Art.* 332.

Second cas. Lorſque le plan xy ſe trouve dans l'équation donnée. 1°. Si pas un des quarrés yy & xx ne ſ'y rencontre ou ſeulement l'un des deux, le lieu ſera * une Hyperbole entre ſes Aſymptotes. 2°. Si les deux quarrés yy & xx ſ'y trouvent avec differens ſignes, le lieu ſera * une Hyperbole rapportée à ſes diametres. 3°. Si ces deux quarrés ſ'y rencontrent avec les mêmes ſignes, on délivrera le quarré yy de fractions, & le lieu ſera * une Parabole lorſque le quarré de la moitié de la fraction qui multiplie xy eſt égal à la fraction qui multiplie le quarré xx; une * Ellipſe ou un cercle lorſqu'il eſt moindre; & enfin une * Hyperbole ou deux Hyperboles oppoſées rapportées à ſes diametres lorſqu'il eſt plus grand.

* *Art.* 339.
* *Art.* 332.
* *Art.* 310.
* *Art.* 324.
* *Art.* 332.

On décrira le lieu ſelon l'article 310. ſ'il eſt une Parabole; ſelon l'article 314. ſ'il eſt une Ellipſe ou un cercle; ſelon l'article 332. ſ'il eſt une Hyperbole ou deux Hyperboles oppoſées rapportées à ſes diametres; & enfin ſelon l'article 339 ſi c'eſt une Hyperbole entre ſes Aſymptotes. Tout ceci n'eſt qu'une ſuite de ces quatre articles.

COROLLAIRE.

346. UNE équation du ſecond degré étant donnée, comme la Section Conique que l'on trouve par les regles preſcrites eſt le lieu * de toutes les valeurs tant vraies que fauſſes de l'inconnuë y, qui répondent aux valeurs tant vraies que fauſſes de l'autre inconnuë x; il ſ'enſuit qu'il ne peut y avoir que cette ſeule Section qui ſoit le lieu de l'équation donnée.

* *Art.* 313.



LIVRE HUITIÉME.

Des Problêmes indéterminés.

PROPOSITION GENERALE.

347.
FIG.CLXXXIV.



ROUVER le lieu d'une infinité de points qui ayent tous certaines conditions marquées, lorsque ce lieu ne passe point le second degré.

1°. On supposera comme connuës & déterminées deux lignes droites inconnuës & indéterminées AP (x), PM (y), qui fassent entr'elles un angle APM donné ou pris à discretion ; & dont l'une AP ait une origine fixe & invariable en un point A, & s'étende le long d'une ligne donnée de position ; l'autre PM qui détermine toujours par son extremité M, l'un des points cherchés, change continuellement d'origine, & soit toujours parallele à la même ligne. 2°. On tirera les autres lignes que l'on jugera utiles à la solution du Problême, & on les exprimera par des lettres ; sçavoir, les connuës par les premieres lettres de l'Alphabet, & les inconnuës par les dernieres. 3°. On regardera la question comme resoluë, & aprés en avoir parcouru toutes les conditions, on arrivera enfin à une équation qui ne renfermera que les deux inconnuës x & y mêlées avec des connuës. 4°. Cette équation dans laquelle on suppose que les inconnuës x & y ayent au plus deux dimensions, étant formée, on en construira le lieu selon les regles prescrites dans le Livre précédent ; & le lieu ainsi construit resoudra la question. Tout ceci s'éclaircira par les Exemples qui suivent.

EXEMPLE I.

348. TROUVER dans l'angle donné *BAC* le point *M*, tel qu'ayant mené de ce point les deux droites *MF*, *MG*, qui fassent sur les côtés *AB*, *AC*, toujours vers la même part, des angles donnés *MFB*, *MGC*; la droite *MF* soit toujours à la droite *MG* en la raison donnée de a à b. Et comme il y a une infinité de ces points, on demande la ligne qui les renferme tous, & qui en est par conséquent le lieu. FIG. CLXXXIV.

Par le point *M*, que l'on suppose être un des points cherchés, ayant mené la ligne *MP* parallele à *AC*; on considerera les deux droites inconnuës & indéterminées *AP* (x), *PM* (y), comme connuës & déterminées. On prendra sur le côté *AB* la partie $AB = a$, on tirera les droites *BC*, *BD*, paralleles à *MF*, *MG*, & qui rencontrent aux points *C*, *D*, l'autre côté *AC* prolongé, s'il est nécessaire; & on nommera les connuës *AC*, c; *BC*, f; *BD*, g. Presentement menant *MQ* parallele à *AB*, les triangles semblables *ACB*, *PMF*, & *ABD*, *QMG*, donneront ces deux proportions : *AC* (c). *BC* (f) :: *MP* (y). $MF = \frac{fy}{c}$, & *AB* (a). *BD* (g) :: *MQ* ou *AP* (x). $MG = \frac{gx}{a}$; ce qui satisfait à la premiere condition du Problême, puisque les lignes *MF*, *MG*, sont toujours supposées paralleles aux deux mêmes droites *BC*, *BD*, qui font sur les côtés *AB*, *AC*, les angles donnés. Or par la seconde condition qui reste à accomplir, il faut que *MF* $(\frac{fy}{c})$. *MG* $(\frac{gx}{a})$ :: a, b; d'où l'on tire l'équation $y = \frac{cgx}{bf}$ qui renferme toutes les conditions du Problême, & dont le lieu sera par conséquent celui que l'on cherche. Il se construit * ainsi. * Art. 306.

Ayant pris sur la ligne *AP*, la partie $AH = b$, soit menée $HE = \frac{cg}{f}$ parallele à *PM* & du même côté, & soit tirée la droite indéfinie *AE*. Je dis qu'elle sera le lieu de tous les points cherchés *M*.

Car ayant mené par un de ses points quelconques *M* les droites *MP*, *MQ*, paralleles aux deux côtés *AC*, *AB*, & les droites *MF*, *MG*, paralleles à *BC*, *BD*, & qui font par conséquent sur les deux côtés *AB*, *AC*, les angles donnés; on aura à cause des triangles semblables *AHE*, *APM*, cette proportion; *AH* (b). *HE* $(\frac{cg}{f})$ :: *AP* (x). $PM (y) = \frac{cgx}{bf}$, & à cause des triangles semblables *ACB*, *PMF*, & *ABD*, *QMG*, ces deux autres : *AC* (c). *CB* (f) :: *MP* $(\frac{cgx}{bf}$. $MF = \frac{gx}{b}$; &

$AB (a) . BD (g) :: MQ$ ou $AP (x) . MG = \frac{gx}{a}$. Et par conséquent $MF (\frac{gx}{b}) . MG (\frac{gx}{a}) :: a . b$. Ce qui étoit proposé.

FIG. CLXXXV. Je n'ai resolu cette question par le calcul, que pour la rapporter à la Proposition generale, & commencer par des Exemples simples & aisés à en faire voir l'application ; car on peut resoudre ce Problême sans aucun calcul, & d'une maniere plus facile en cette sorte.

Soient tirées les droites AK, AL, qui fassent sur AB, AC, les angles donnés KAB, LAC, & qui soient entr'elles en la raison donnée de a à b. Soient menées les droites KM, LM, paralleles aux côtés AB, AC, & qui se rencontrent au point M ; par où, & par le sommet A de l'angle donné BAC, soit tirée la ligne AM : Je dis qu'elle sera le lieu cherché.

Car ayant mené d'un de ses points quelconques E les droites ER, ES, paralleles à AK, AL ; on aura à cause des triangles semblables AER, MAK, & AES, MAL, ces proportions $ER . AK :: AE . AM :: ES . AL$. Et partant $ER . ES :: AK . AL :: a . b$.

EXEMPLE II.

349. FIG. CLXXXVI. LES paralleles AB, CD, étant données de position ; trouver le lieu de tous les points M tellement placés entre ces lignes, qu'ayant tiré les droites MP, MG ; qui fassent avec elles toujours vers la même part des angles donnés MPB, MGD ; elles soient toujours entr'elles en la raison donnée de a à b.

Ayant pris pour l'origine fixe des indéterminées $AP (x)$, un point quelconque A de la ligne AB, & les deux droites inconnuës & indéterminées $AP (x)$, $PM (y)$ étant supposées connuës & déterminées, on menera les lignes AC, AE, paralleles aux deux droites, MP, MG ; & on nommera les connuës AC, c ; AE, f ; Cela fait, on prolongera PM jusqu'à ce qu'elle rencontre CD en F ; & les triangles semblables CAE, FMG, donneront $AC (c) . AE (f) :: MF (c - y)$. $MG = \frac{cf - fy}{c}$. Or selon la condition du Problême qui reste à accomplir, il faut que $MP (y) . MG (\frac{cf - fy}{c}) :: a . b$; d'où l'on tire l'équation $y = \frac{acf}{bc + af}$ qui renferme toutes les conditions du Problême, & dont le lieu qui est * une ligne droite indéfinie HM menée parallelement à AB en sorte que $AH = \frac{acf}{bc + af}$, est par conséquent le lieu cherché.

* Art. 307.

EXEMP.

EXEMPLE III.

350. DEUX points A, B, étant donnez, en trouver un troifiéme M, tel qu'ayant mené les droites MA, MB; elles foient toujours entr'elles en raifon donnée de a à b. Et comme il y a une infinité de ces points M, il eft queftion de décrire le lieu qui les renferme tous. FIG.CLXXVII.

Il peut arriver trois differens cas felon que a eft moindre, plus grand, ou égal à b.

Premier cas. Par le point M, que je fuppofe être un de ceux qu'on cherche, ayant mené la ligne MP perpendiculaire fur AB (car n'y ayant point d'angle donné dans le Problême, on choifit l'angle droit comme le plus fimple), & les deux droites inconnuës & indéterminées AP (x), PM (y) étant fuppofées connuës & déterminées; on nommera la donnée AB, c; & à caufe des triangles rectangles APM, BPM, on aura les quarrés $\overline{AM}^2 = xx + yy$, $\overline{BM}^2 = cc - 2cx + xx + yy$. Or par la condition du Problême, $\overline{AM}^2$ $(xx + yy)$. $\overline{BM}^2$ $(cc - 2cx + xx + yy)$ :: $aa.bb$. D'où (en multipliant les extrêmes & les moyens & divifant enfuite par $bb - aa$) on forme cette équation $yy + xx + \frac{2aacx}{bb - aa} - \frac{aacc}{bb - aa} = 0$, qui renferme la condition du Problême, & dont le lieu qui eft par conféquent celui qu'on demande, fe conftruit par le moyen de l'article 322. (Liv. preced) en cette forte.

Soit prife fur la ligne AP, la partie $AC = \frac{aac}{bb - aa}$ du côté oppofé à PM; & foit décrite du centre C, & du rayon CD ou $CE = \frac{abc}{bb - aa}$ la circonference d'un cercle. Je dis que fa portion DMO renfermée dans l'angle PAO, fait par la ligne AP & par la droite AO menée parallelement à PM & du même côté, fera le lieu de l'équation que l'on vient de trouver. FIG.CLXXVII.

Car ayant mené d'un de fes points quelconques M, la perpendiculaire MP fur AB, on aura par la proprieté du cercle $\overline{CD}^2 - \overline{CP}^2$ ou $EP \times PD = \overline{PM}^2$; c'eft à dire en mettant pour ces quarrés leurs valeurs analytiques, l'équation precedente.

Si l'on fuppofe à prefent que les points M tombent dans l'angle EAR oppofé au fommet à l'angle BAO dans lequel * *Art.* 304.

on a ſuppoſé en faiſant le calcul qu'ils étoient ſitués, on
*Art. 304. trouvera en faiſant * $AP = -x$, & $PM = -y$, la même équation que ci-deſſus, tant par la condition du Problême, que par la proprieté de la portion *RME* de la même circonference que l'on vient de décrire; d'où il ſuit que cette portion eſt le lieu de tous les points cherchés *M*, lorſqu'ils tombent dans l'angle *RAE*. Et ſi l'on ſuppoſe enfin que les points *M* tombent dans l'angle *BAR* & enſuite dans l'angle *EAO*, on trouvera de même (en obſervant de faire $PM = -y$, lorſqu'il tombe de l'autre côté de la ligne *AB*; & $AP = -x$, lorſque le point *P* tombe de l'autre côté du point fixe *A*) que les portions *DR*, *EO*, de la même circonference ſeront les lieux de ces points; & qu'ainſi la circonference entiere qui a pour diametre la ligne *DE*, eſt le lieu complet de tous les points requis *M*.

Second cas. On trouvera par un raiſonnement ſemblable à celui du premier cas, cette équation $yy + xx - \frac{2aacx}{aa-bb} + \frac{aacc}{aa-bb} = 0$. dont le lieu ſe conſtruit ainſi.

FIG. CLXXXVIII. Soit priſe ſur *AP*, la partie $AC = \frac{aac}{aa-bb}$ du côté de *PM*; & ſoit décrite du centre *C*, & du rayon *CD* ou $CE = \frac{abc}{aa-bb}$ un cercle. Je dis que ſa circonference ſera le lieu de tous les points requis *M*. Cela ſe prouve de même que dans le premier cas.

Si l'on conſidere dans ces deux cas que la circonference qui a pour diametre *DE*, & qui eſt le lieu de tous les points cherchés *M*, doit couper la ligne *AB* en deux points *D*, *E*, tels que $AD . DB :: a . b$, & $AE . EB :: a . b$; puiſque le point *M* tombant en *D* la droite *AM* devient *AD*; & *BM*, *BD*; & de même que le point *M* tombant en *E*, la droite *AM* devient *AE*, & *BM*, *BE*: on abregera de beaucoup les conſtructions precedentes. Car il eſt viſible qu'ayant diviſé la ligne *AB* prolongée du côté qu'il ſera neceſſaire, en deux points *D*, *E*, tels que $AD . DB :: a . b$, & $AE . EB :: a . b$; la ligne *DE* ſera en l'un & l'autre cas le diametre de la circonference qui eſt lieu cherché.

Troiſiéme cas. Puiſque dans ce cas $a = b$, l'équation precedente ſe change en celle-ci $x = \frac{1}{2}c$; d'où l'on voit
*Art. 307. FIG. CLXXXIX. * que ſi l'on prend *AP* égale à la moitié de *AB* & qu'on tire la droite *PM* perpendiculaire ſur *AB*, cette ligne *PM*

indéfiniment prolongée de part & d'autre, ſera le lieu de tous les points requis M. Ce qui eſt d'ailleurs évident par les Elemens de Geometrie.

EXEMPLE IV.

351. DEUX lignes droites DE, DN, indéfiniment prolongées de part & d'autre du point D, étant données de poſition ſur un plan, avec un point C hors de ces lignes; ſoit imaginé un angle donné CEM ſe mouvoir par ſon ſommet E le long de DE, en ſorte que ſon côté EC qui rencontre DN en N, paſſe toujours par le même point C, & que ſon autre côté EM ſoit toujours troiſiéme proportionnel à NC, CE. On demande le lieu de tous les points M dans ce mouvement. FIG. CXC.

Soient menées CA parallele à DN; & CB qui faſſe ſur DE au point B un angle égal à l'angle donné CEM, du côté qu'il ſera neceſſaire, afin que CE tombant ſur CB la droite EM tombe ſur DE. Cela poſé je diſtingue la queſtion en trois differens cas: car ou le ſommet E de l'angle donné CEM ſe meut ſur la droite DE de l'autre côté du point B par rapport au point A; ou entre les points B, A; ou enfin de l'autre côté du point A par rapport au point B.

Premier cas. Lorſque le ſommet E ſe meut ſur la ligne DE de l'autre côté du point B par rapport au point A. Ayant mené du côté du point C la ligne AQ qui faſſe ſur DE au point A l'angle BAQ égal à l'angle ABC, on tirera par l'un des points cherchés M, que l'on regarde comme donné, la ligne MP parallele à AQ, & qui rencontre DE en P; & on aura deux triangles ſemblables CBE, EPM; car les deux angles CBE, EPM, ſont égaux chacun à l'angle donné CEM, & de plus les angles BCE, PEM, ſont auſſi égaux entr'eux; puiſque dans le triangle CBE l'angle externe CEP ou $CEM + PEM$ eſt égal aux deux internes oppoſés BCE & CBE ou CEM. Si donc l'on nomme les données AD, a; AB, b; BC, c; & les inconnuës & indéterminées AP, x; PM, y; AE, z; on aura, tant à cauſe des paralleles DN, AC, que de la condition du Problême, ces proportions $AD\,(a).\ AE\,(z) :: CN.\ CE :: CE.$

$EM :: CB\ (c).\ EP\ (x - z) :: BE\ (z - b),\ PM\ (y)$; d'où l'on forme (en multipliant les extrémes & les moyens) ces deux équations $ax - az = cz$ & $ay = zz - bz$, qui, en prenant, pour abreger, $f = a + c$, & faisant évanoüir z, se reduisent à celle-ci $xx - \frac{bf}{a}x - \frac{ff}{a}y = 0$ qui ne renferme plus que les inconnuës x & y, & dont le lieu, qui est celui que l'on cherche, se construit * ainsi.

*Art. 310.

Soit prise sur la ligne AP, la droite $AF = \frac{bf}{2a}$ du côté de PM; & ayant mené FL parallele à PM, soit prise sur cette ligne du côté opposé à PM, la partie $FG = \frac{bb}{4a}$. Soit décrite du diametre GL qui ait pour origine le point G, pour parametre $GH = \frac{ff}{a}$, & pour ordonnées des droites LM paralleles à AP, une Parabole qui s'étende du côté de PM. Je dis que sa portion indéfinie OM renfermée dans l'angle PAQ, sera le lieu de tous les points cherchés M.

Car ayant mené d'un de ses points quelconques M, la ligne MQ parallele à AP & qui rencontre le diametre CL en L, on aura ML ou $PF = x - \frac{bf}{2a}$ & $GL = y + \frac{bb}{4a}$, & par la proprieté de la Parabole, $\overline{ML}^2$ $(xx - \frac{bf}{a}x + \frac{bbff}{4aa})$ $= LG \times GH$ $(\frac{ff}{a}y + \frac{bbff}{4aa})$; ce qui en transposant à l'ordinaire donne l'équation $xx - \frac{bf}{a}x - \frac{ff}{a}y = 0$, qu'il falloit construire.

Second cas. Lorsque le sommet E parcourt la partie BA. Il est clair dans ce cas que les points M tomberont de l'autre côté de DE, puisque l'angle donné CEM sera toujours plus grand que l'angle CEP qui diminuë continuellement. C'est pourquoi j'ai $PM = -y$, & comme je trouve par un raisonnement semblable au precedent, la même équation; il s'ensuit que la portion AGO de la Parabole que l'on vient de décrire, sera le lieu de tous les points M, puisqu'elle donne aussi par sa proprieté cette même équation.

Troisiéme cas. Lorsque le sommet se meut de l'autre côté du point A par rapport au point B. Il est clair encore dans ce cas que tous les points cherchés M doivent tomber au dessous de la ligne DE; & on trouvera comme dans le premier cas $AD.\ AE :: CN.\ CE :: CE.\ EM :: CB.\ EP$. Et partant $AD.\ CB :: AE.\ EP$. D'où l'on voit que

EP eſt plus grande, moindre, ou égale à *EA* ſelon que *CB* eſt plus grande, moindre, ou égale à *AD*; & qu'ainſi prolongeant *AQ* au deſſous de *DE* vers *K*, tous les points cherchés *M* tombent dans l'angle *BAK* dans le premier de ces trois cas, dans ſon complement à deux droits *DAK* dans le ſecond cas, & enfin ſur la droite *AK* dans le troiſiéme cas. Je ſuppoſe ici que *CB* ſoit plus grande que *AD*; & comme faiſant $PM = -y$, parce qu'il tombe de l'autre côté de *AP*, je ne trouve plus la même équation que dans le premier cas, je ne fais plus d'attention à la conſtruction de ce cas. C'eſt pourquoi nommant à l'ordinaire *AP*, x; *PM*, y; j'arrive à cette équation $xx + \frac{bg}{a}x - \frac{gg}{a}y = o$, dans laquelle $g = c - a$, dont le lieu qui eſt celui que l'on cherche eſt une portion indéfinie *AM* d'une autre Parabole que la precedente laquelle s'étend vers le côté oppoſé, & qui ſe conſtruit * en cette ſorte. *Art. 310.

Soit priſe ſur *AP* de l'autre côté de *PM* la partie $AS = \frac{bg}{2a}$; ſoit menée $ST = \frac{bb}{4a}$ parallele à *AQ*, & du côté oppoſé à *PM*; ſoit décrite du diametre *TS* qui ait pour origine le point *T*, pour parametre une ligne $= \frac{gg}{a}$, & pour ordonnées des droites paralleles à *AP*, une Parabole qui s'étende du côté de *PM*. Sa portion indéfinie *AM* renfermée dans l'angle *PAK* ſera le lieu de tous les points cherchés *M* dans ce dernier cas, où l'on ſuppoſe que *CB* ſurpaſſe *AD*.

Il eſt donc évident que le lieu cherché de tous les points *M* eſt compoſé de deux portions indéfinies de differentes Paraboles, dont l'une *AGOM* s'étend du côté de *C*; & l'autre *AM* du côté oppoſé, & partent toutes deux du point *A*; car le côté *CE* de l'angle donné *CEM* tombant ſur *CA* parallele à *DN*, il eſt clair que *CN* devient infinie, & qu'ainſi *EM* eſt nulle ou zero, puiſqu'on a toujours *NC. CE :: CE . EM :* c'eſt à dire que le point *M* ſe confond avec le point *E* qui tombe ſur le point *D*. D'où l'on voit que *AF* eſt une ordonnée au diametre *FG*, & *AS* au diametre *ST*; ce qui donne lieu à la conſtruction ſuivante qui eſt generale.

Ayant pris ſur la ligne indéfinie *AP* de part & d'autre du point *B* les parties *BO*, *BR*, égales chacune à la quatriéme proportionnelle aux trois lignes *DA*, *AB*, *BC*; on me-

nera par les points de milieu *F*, *S*, l'un de *AO*, l'autre de *AR*, les droites *FG*, *ST*, parelleles à *AQ*; & égales chacune à la troisiéme proportionnelle à $4AD$, & à *AB*; sçavoir, *FG* du côté opposé au point *C*, & *ST* du même côté. Cela fait, on décrira deux differentes Paraboles dont l'une aura pour diametre *GF* & pour ordonnée *FA*, & l'autre pour diametre *TS* & pour ordonnée *SA*; je dis que leurs portions indéfinies *MAGOM* seront le lieu complet de tous les points cherchés *M*.

Car *BO* ou $BR = \frac{bc}{a}$, & partant *AF* ou $\frac{1}{2}AO = \frac{1}{2}b + \frac{bc}{2a} = \frac{bf}{2a}$; & de même *AS* ou $\frac{1}{2}AR = \frac{bc}{2a} - \frac{1}{2}b = \frac{bg}{2a}$. Donc &c.

On peut remarquer en passant que si l'angle donné, qui se meut par son sommet le long de la ligne *DE*, étoit égal au complement à deux droits de l'angle *CEM*, sans rien changer au reste; c'est à dire que les points *M* tombassent sur la ligne *EM* prolongée de l'autre côté du point *E*: le lieu de tous les points *M* seroit alors les portions restantes des deux Paraboles que l'on vient de décrire.

Si les points *A*, *B*, *C*, étoient situés differemment de ce qu'on les suppose dans cette figure, à laquelle on a accommodé le raisonnement; on arriveroit toujours comme l'on vient de faire à deux équations qui ne pourroient être differentes des precedentes que par quelques signes, & dont les lieux seroient par conséquent des portions de Paraboles que l'on décriroit avec la même facilité.

Le Comte *Roger de Vintimille* a proposé ce Problême avec quelques autres dans le Journal de Parme du mois d'avril de l'année 1693. ce qui a donné occasion au Pere *Saquerius* de faire imprimer un petit Livre à Milan, dans lequel il avouë qu'il n'a pû resoudre celui-ci, quoiqu'il fasse assez paroître par la solution des autres qu'il est fort versé dans la Geometrie.

EXEMPLE V.

352. FIG. CXCI. UNE ligne droite indéfinie *AP* étant donnée de position, avec deux points fixes *A*, *C*, l'un sur cette droite, & l'autre au dehors; soit décrite une Parabole *AM* qui ait pour parametre une ligne quelconque, & pour axe la ligne *AP* dont l'origine soit en *A*; & soit menée du point donné *C* une perpendiculaire *CM* à cette Parabole. On demande le lieu de tous les points *M*, dont il est visible qu'il y a une infinité;

puisque changeant continuellement de parametres, on peut décrire une infinité de Paraboles différentes, qui ayent toutes pour axes la même droite indéfinie AP, dont l'origine soit toujours en A.

Ayant mené par le point donné C la perpendiculaire CB sur AP, & par un des points cherchés M que l'on regarde comme donné, les droites MP, MK, paralleles à BC, AP, & la tangente MT; on nommera les données AB, a; BC, b; & les inconnuës & indéterminés AP, x; PM, y; ce qui donne $CK = b - y$, $MK = a + x$. Or par la condition du Problême, l'angle CMT est droit; & par conséquent les triangles rectangles TPM, CKM, seront semblables; car si l'on ôte des angles droits CMT, KMP, le même angle KMT, les restes CMK, TMP, seront égaux. Donc TP * $(2x)$. PM (y) :: CK $(b - y)$. KM $(a + x)$, d'où l'on forme en multipliant les extrêmes & les moyens cette équation $yy - by + 2xx + 2ax = 0$, dont le lieu qui est celui qu'on demande est * une Ellipse que l'on construit * en cette sorte. *Art. 21. & 23. *Art. 322. *Art. 324.

Ayant mené $AD = \frac{1}{2}b$ perpendiculaire à AP & du côté de PM, & tiré la droite indéfinie DL parallele à AP, on prendra sur cette ligne la partie $DE = \frac{1}{2}a$ du côté opposé à PM; & de part & d'autre du point E les parties EF, EG égales chacune à $\sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb}$. Ensuite de l'axe FG qui ait pour parametre une ligne GH double de FG, on décrira une Ellipse. Je dis que sa portion AMO renfermée dans l'angle PAD est le lieu de l'équation precedente; & par consequent de tous les points cherchés M, lorsqu'ils tombent dans cet angle.

Car prolongeant PM, s'il est necessaire, jusqu'à ce qu'elle rencontre l'axe FG en L, on aura l'ordonnée $ML = \frac{1}{2}b - y$, & $EL = \frac{1}{2}a + x$, & par la proprieté de l'Ellipse, $FL \times LG$ ou $\overline{EF}^2 - \overline{EL}^2$ $(\frac{1}{4}bb - ax - xx)$. $\overline{LM}^2$ $(\frac{1}{4}bb - by + yy)$ :: FG. GH :: 1.2; ce qui donne en multipliant les extrêmes & les moyens $\frac{1}{4}bb - 2ax - 2xx = \frac{1}{4}bb - by + yy$. Donc &c.

Si l'on suppose à present que les points M tombent dans les les angles BAD, BAR, on trouvera toujours la même équation que ci-dessus, tant par la condition du Problême que par la proprieté de l'Ellipse; en observant de faire $AP = -x$,

& $PM = -y$, lorſque le point P tombe de l'autre côté de l'origine A, & PM, de l'autre côté de la ligne AP. D'où il ſuit que les portions de l'Ellipſe, que l'on vient de décrire, renfermées dans ces angles ſont le lieu de ces points.

On doit remarquer qu'il eſt impoſſible qu'aucun des points cherchés M, tombe dans l'angle PAR, oppoſé au ſommet à l'angle BAD dans lequel eſt ſitué le point donné C, d'où doivent partir toutes les perpendiculaires aux Paraboles. Car ſi d'un point quelconque pris dans cet angle PAR, on mene des droites comme MP, MT, perpendiculaires ſur AP & CM, il eſt viſible que les points P, T, tomberont du même côté du point A, & par conſequent que cette ligne MT ne pourra être tangente en M comme le demande la queſtion.

Si l'on ſuppoſe que AP (x) devienne nulle ou zero, l'équation precedente $yy - by + 2xx + 2ax = o$ ſe changera en celle-ci $yy - by = o$, dont les deux racines ſont $y = o$, & $y = b$; ce qui fait voir qu'en tirant AO parallele & égale à BC, le lieu des points cherchés M paſſera par les deux points A, O. On prouvera de même en ſuppoſant que le point P tombe de l'autre côté de l'origine A, & faiſant AP $(-x)$ $= AB$ (a), que ce même lieu paſſera par les points B, C; de ſorte que l'Ellipſe doit être décrite autour du rectangle $ABCO$. Ceci donne lieu à une nouvelle conſtruction que voici.

*Art. 176. Soit formé le rectangle $ABCO$, & ſoit décrite * autour de ce rectangle une Ellipſe, dont l'axe FG parallele aux côtés AB, OC, ſoit à ſon parametre GH, comme 1 eſt à 2. Il eſt évident qu'elle ſera le lieu cherché.

REMARQUE I.

353. Si la nature des lignes courbes telles que AM étoit exprimée par l'équation generale $y^n = x^m a^{n-m}$ (les lettres m, n, marquent les expoſans des puiſſances de y & x tels qu'ils puiſ-

*Art. 229. ſent être) qui renferme * non ſeulement la Parabole ordinaire, mais encore celles de tous les degrés à l'infini: on auroit

*Art. 237. TP * $(\frac{n}{m}x)$. $PM(y)$ :: $CK(b-y)$. $KM(a+x)$: ce qui donne $yy - by + \frac{n}{m}xx + \frac{n}{m}ax = o$, dont le lieu qui eſt celui qu'on cherche, eſt une Ellipſe que l'on conſtruira ſelon l'article 322. ou bien ſelon l'article 176. ſi l'on obſerve que cette

te Ellipse doit passer autour du rectangle donné *ABCO*, & que son axe *FG* parallele aux côtés *AB*, *OC*, doit être à son parametre *GH* en la raison donnée de *m* à *n*.

REMARQUE II.

354. Si le cèntre *E* de l'Ellipse qu'on vient de décrire tomboit sur l'origine *A* de l'axe commun *AP* de toutes les Paraboles *AM*; & l'axe *FG* de l'Ellipse sur l'axe *AP* des Paraboles: cette Ellipse couperoit toutes ces differentes Paraboles à angles droits. On peut énoncer ce Theorême de la maniere qui suit. FIG. CXCI.

Soient une infinité de Paraboles comme *AM* de tel degré qu'on voudra, qui ayent toutes pour axe commun la même ligne *AP*, dont l'origine est toujours au même point *A*; & soit une Ellipse qui ait pour centre le point *A*, & dont l'axe *FG* situé sur *AP* soit à son parametre, comme le nombre *m* exposant de la puissance de *AP* (x) est au nombre *n* exposant de la puissance de *PM* (y), dans l'équation generale $y^n = x^m a^{n-m}$ qui exprime la nature des Paraboles *AM*. Je dis que cette Ellipse coupera toutes ces Paraboles à angles droits. FIG. CXCII.

Par le point *M*, où elle coupe telle de ces Paraboles qu'on voudra, ayant mené la tangente *MT* à cette Parabole, & *MS* perpendiculaire à cette tangente; il est question de prouver que *MS* touche l'Ellipse au point *M*. Pour en venir à bout, on tirera la perpendiculaire *MP* sur l'axe, & ayant nommé les indéterminées *AP*, x; *PM*, y; & la donnée *FG*, $2t$; on aura par la proprieté de l'Ellipse $FP \times PG$ ($tt - xx$). $\overline{PM}^2$ (yy) :: $m.n$, & partant $myy = ntt - nxx$. Or à cause des angles droits *TPM*, *TMS*, il vient *TP* * ($\frac{n}{m}x$). *PM* (y) :: *PM* (y). $PS = \frac{myy}{nx}$, & par conséquent *AS* ou $AP + PS = \frac{nxx + myy}{nx} = \frac{tt}{x}$ en mettant pour myy la valeur que l'on vient de trouver $ntt - nxx$. D'où l'on voit que *AP*. *AF* :: *AF*. *AS*, & qu'ainsi * la ligne *MS* touche l'Ellipse au point *M*. *Ce qu'il falloit &c.*

* Art. 237.

* Art. 57.

EXEMPLE VI.

355. Soient imaginées une infinité d'Hyperboles qui ayent toutes pour Asymptotes communes les mêmes droites *AP*, *AO*, FIG. CXCIII.

données de position, qui font entr'elles un angle droite PAO; & soient conçuës partir d'un point donné C une infinité de perpendiculaires comme CM à ces Hyperboles. On demande le lieu de tous les points M, où chacune des droites CM rencontre l'Hyperbole à laquelle elle est perpendiculaire.

Ayant tiré les mêmes lignes que dans l'exemple précedent, & les ayant nommées par les mêmes lettres, on arrivera de

* Art. 107. même à cette proportion TP * (x). PM (y) :: CK $(b - y)$. KM $(a - x)$; ce qui donne cette équation $yy - by - xx + ax = o$, dont voici * le lieu.

* Art. 330. ou 335.

Ayant pris sur l'Asymptote AO parallele à PM, la partie $AD = \frac{1}{2}b$, & mené DL parallele à AP; on prendra sur cette ligne la partie $DE = \frac{1}{2}a$ du côté de PM, & de part & d'autre du point E, les parties EF, EG, égales chacune à $\sqrt{\frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb}$ ou $\sqrt{\frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}aa}$ selon que a est plus grand ou moindre que b. On décrira ensuite de la ligne FG, comme premier axe dans le premier cas, & comme second dans le deuxiéme, deux Hyperboles opposées équilateres. Je dis que leurs portions renfermées dans l'angle PAO, seront le lieu de cette équation, & par conséquent celui de tous les points cherchés M.

Car prolongeant PM (s'il est necessaire) jusqu'à ce qu'elle rencontre l'axe FG, en L, on aura l'ordonnée $ML = \frac{1}{2}b - y$, & la partie $EL = x - \frac{1}{2}a$; & * par la proprieté des Hyperboles équilateres $\overline{EL}^2 + \overline{EF}^2$ $(xx - ax + \frac{1}{4}bb) = \overline{LM}^2$ $(\frac{1}{4}bb - by + yy)$ Donc &c.

* Art. 127.

Si $a = b$, la construction precedente n'a plus de lieu, car la valeur du demi axe EF ou EG devient nulle. Et comme l'équation precedente devient celle-ci $yy - ay - xx + ax = o$, ou $yy - ay + \frac{1}{4}aa = xx - ax + \frac{1}{4}aa$ de laquelle extrayant de part & d'autre la racine quarrée, il vient $y - \frac{1}{2}a = x - \frac{1}{2}a$ ou $y = x$, & $\frac{1}{2}a - y = x - \frac{1}{2}a$ ou $y = a - x$;

Fig. CXCIV. il s'ensuit que si l'on acheve le rectangle $ABCO$, & qu'on tire les deux diagonales AC, BO: elles seront le lieu de tous les points cherchés M Car la diagonale AC est le lieu de la premiere équation $y = x$, & l'autre diagonale BO est le lieu de la deuxiéme $y = a - x$.

REMARQUE I.

356. Si la nature des lignes courbes qui ont pour Asymptotes les droites AB, AO, étoit exprimée par l'équation générale $x^m y^n = a^{n+m}$ qui renferme * les Hyperboles de tous les degrés à l'infini, on auroit TP * $(\frac{n}{m}x)$. $PM\,(y)$ :: $CK\,(b-y)$. $KM\,(a-x)$; ce qui donne $yy - by - \frac{n}{m}xx + \frac{n}{m}ax = 0$, dont le lieu se construit * ainsi. Fig. CXCIII. * Art. 229. * Art. 237. * Art. 330.

Ayant trouvé le point E comme dans l'exemple, on prendra sur DL de part & d'autre du point E, les parties EF, EG, égales chacune à $\sqrt{\frac{1}{4}aa - \frac{n}{4m}bb}$ ou $\sqrt{\frac{m}{4n}bb - \frac{1}{4}aa}$; selon que naa est plus grand ou moindre que mbb. Ensuite de la ligne FG comme premier axe dans le premier cas, & comme second dans le deuxiéme, qui soit à son parametre en la raison donnée de m à n, on décrira deux Hyperboles opposées : leurs portions renfermées dans l'angle OAB seront le lieu qu'on cherche.

Si $a.\,b :: \sqrt{m}.\sqrt{n}$, l'équation $yy - by - \frac{n}{m}xx + \frac{n}{m}ax = 0$ se change en celle-ci $yy - ay\sqrt{\frac{n}{m}} - \frac{n}{m}xx + \frac{n}{m}ax = 0$, ou $yy - ay\sqrt{\frac{n}{m}} + \frac{naa}{4m} = \frac{n}{m}xx - \frac{n}{m}ax + \frac{naa}{4m}$ de laquelle extrayant de part & d'autre la racine quarrée, il vient $y - \frac{1}{2}a\sqrt{\frac{n}{m}} = x\sqrt{\frac{n}{m}} - \frac{1}{2}a\sqrt{\frac{n}{m}}$, ou $y = x\sqrt{\frac{n}{m}}$; & $\frac{1}{2}a\sqrt{\frac{n}{m}} - y = x\sqrt{\frac{n}{m}} - \frac{1}{2}a\sqrt{\frac{n}{m}}$ ou $y = a\sqrt{\frac{n}{m}} - x\sqrt{\frac{n}{m}}$. D'où il suit que si l'on acheve le rectangle $ABCO$, & qu'on tire les diagonales BO, AC; ces deux lignes droites seront le lieu de tous les points cherchés M: car la diagonale AC est le lieu de la premiere équation $y = x\sqrt{\frac{n}{m}}$, & l'autre diagonale BO le lieu de la seconde $y = a\sqrt{\frac{n}{m}} - x\sqrt{\frac{n}{m}}$. Fig. CXCIV.

On prouvera de même que dans l'Ellipse, que les Hyperboles opposées qui sont le lieu cherché, doivent être décrites autour du rectangle donné $ABCO$; & comme l'axe FG, parallele aux côtés AB, OC, doit être à son parametre en la raison donnée de m à n, il s'ensuit qu'on peut décrire, si l'on veut, ces Hyperboles par le moyen de l'article 176. (Liv. 4.) Fig. CXCIII.

REMARQUE II.

357. Si le centre E de l'Hyperbole BFC tomboit sur le point A, & son axe FG sur la ligne AP; je dis que cette Hyperbole Fig. CXCIII.

couperoit à angles droits toutes celles qui ont pour Asymptotes les droites AP, AO; ce qu'on peut énoncer ainsi.

Fig.CXCV. Soient une infinité d'Hyperboles de tel degré qu'on voudra, qui ayent toutes pour Asymptotes communes les mêmes droites AP, AO, qui font entr'elles un angle droit; & soit une Hyperbole ordinaire FM qui ait pour centre le point A, & dont le premier axe FG situé sur AP, soit à son parametre comme le nombre m exposant de la puissance de AP (x) est au nombre n exposant de la puissance de PM (y) dans l'équation generale $x^m y^n = a^{m+n}$ qui exprime la nature des Hyperboles MAM. Je dis que l'Hyperbole FM coupe à angles droits toutes ces differentes Hyperboles.

Ayant mené par le point M où elle coupe telle de ces Hyperboles qu'on voudra, une tangente MT à cette Hyperbole, & une perpendiculaire MS à cette tangente; il s'agit de prouver que à l'Hyperbole MF, MS sera tangente pour le faire, on tirera MP perpendiculaire sur l'Asymptote AP; & ayant nommé les indéterminés AP, x; PM, y; & la donnée FG, $2t$; on aura par la proprieté de l'Hyperbole FM cette proportion $FP \times PG$ $(xx - tt)$. $\overline{PM}^2$ $(yy) :: m . n$, & partant $myy = nxx - ntt$. Or à cause des angles droits TPM,
* Art. 237. TMS, il vient TP * $(\frac{n}{m}x)$. PM $(y) ::$ PM (y). $PS = \frac{myy}{nx}$. Et par consequent AS ou $AP - PS = \frac{nxx - myy}{nx} = \frac{tt}{x}$ en mettant pour myy la valeur qu'on vient de trouver $nxx - ntt$. D'où l'on voit que AS est troisiéme proportionnelle à AP, AF;
* Art. 121. & qu'ainsi * la ligne MS touche l'Hyperbole FM au point M. *Ce qu'il falloit démontrer.*

EXEMPLE VII.

358. LA Parabole BAC étant donnée, on demande le lieu de tous
Fig.CXCVI. les points M, tels qu'ayant mené de chacun de ces points, deux tangentes MB, MC, à cette Parabole; l'angle BMC qu'elles comprennent soit toujours égal à un angle donné.

Il peut arriver que l'angle donné BMC soit aigu, obtus, ou droit; ce qui fait trois differens cas.

Premier cas. Lorsque l'angle donné BMC est aigu. Ayant
* Art. 160. mené * l'axe AD de la Parabole donnée BAC, qui rencontre les tangentes MB, MC, aux points F, G, on tirera sur cet axe des points touchans B, C, & du point de concours M,

les perpendiculaires *BD*, *CE*, *MP*. Et ayant mené *MN* qui faſſe ſur l'axe *AD* l'angle *FNM* égal à l'angle *FMG* complement à deux droits de l'angle donné *BMC*, on nommera les inconnuës & indéterminées *AP*, x; *PM*, y; *AF*, s; *AG*, t; & le parametre de l'axe *AD*, ſçavoir, *AV*, a; lequel eſt donné, puiſque la Parabole *BAC* eſt donnée. Cela poſé; à cauſe du triangle rectangle *FPM*, on aura le quarré $\overline{FM}^2 = ss - 2sx + xx + yy$, lequel étant diviſé par *FG* $(s-t)$ donnera $\frac{ss - 2sx + xx + yy}{s-t} = FN$, à cauſe des triangles ſemblables *FMG*, *FMN*; & partant *PN* ou $FP - FN = \frac{sx + tx - st - xx - yy}{s-t}$. Je cherche à preſent par le moyen de la Parabole donnée *BAC* des valeurs de $s + t$, st, & $s - t$ par rapport à x & y, afin qu'étant ſubſtituées, dans la valeur de *PN*, cette ligne ne renferme plus dans ſon expreſſion d'autres inconnuës que x & y. Ce que je fais ainſi.

Les triangles ſemblables *FPM*, *FDB*; & *GPM*, *GEC*, donnent $FP\,(s - x)\,.\,PM\,(y) :: FD$ * $(2s)\,.\,BD$ * $(\sqrt{as})$. *Art. 22.
Et $GP\,(x - t)\,.\,PM\,(y) :: GE\,(2t)\,.\,CE\,(\sqrt{at})$. D'où je *Art. 7.
forme ces deux équations $ss - 2xs - \frac{4yy}{a}s + xx = 0$, & $tt - 2xt - \frac{4yy}{a}t + xx = 0$; c'eſt à dire (en faiſant $p = 2x + \frac{4yy}{a}$ pour faciliter le calcul) $ss - ps + xx = 0$, & $tt - pt + xx = 0$. Je retranche la ſeconde équation de la premiere, & j'ai $ss - tt - ps + pt = 0$ qui étant diviſée par $s - t$ donne $s + t = p$; & partant $s = p - t$, & $ss = ps - ts = ps - xx$ à cauſe de la premiere équation, d'où je tire $st = xx$. Si l'on ôté $4xx$ valeur de $4st$ de pp valeur de $ss + 2ts + tt$, on formera enfin cette égalité $ss - 2st + tt = pp - 4xx$, & extrayant de part & d'autre la racine quarrée, on aura $s - t = \sqrt{pp - 4xx} = \frac{4y\sqrt{ax + yy}}{a}$ en mettant pour p ſa valeur $2x + \frac{4yy}{a}$.

Si l'on met à preſent à la place de $s + t$, st, & $s - t$, leurs valeurs $2x + \frac{4yy}{a}$, xx, & $\frac{4y\sqrt{ax + yy}}{a}$ dans $\frac{sx + tx - st - xx - yy}{s-t}$, on trouvera $FN = \frac{4xy - ay}{4\sqrt{ax + yy}}$. Or ſi l'on prend ſur l'axe la partie *NQ* égale au parametre *AV* (a), & qu'on tire *QT* parallele à *PM*, & qui rencontre en *T* la droite *MN* prolongée au-

tant qu'il ſera neceſſaire ; il eſt viſible que la ligne QT ſera donnée, puiſque dans le triangle rectangle NQT, l'angle QNT qui eſt égal à l'angle donné BMC eſt donné, & que de plus le côté NQ qui eſt égal au parametre AV de l'axe de la Parabole, eſt auſſi donné. Soit donc la donnée $QT = b$, & à cauſe des triangles ſemblables NPM, NQT, on aura cette proportion, $NP\,(\frac{4xy - ay}{4\sqrt{yy + ax}}).\ PM\,(y) :: a.\ b$, & partant $4a\sqrt{yy + ax} = 4bx - ab$, c'eſt à dire en ôtant les incommenſurables $yy - \frac{bb}{aa}xx + ax + \frac{bb}{2a}x - \frac{1}{16}bb = 0$,
* Art. 330. & 332. dont le lieu (qui eſt celui qu'on cherche) ſe conſtruit * en cette ſorte.

Soit priſe ſur l'axe AD de la Parabole, la partie $AH = \frac{1}{4}a + \frac{a^3}{2bb}$ du côté de PM; & de part & d'autre du point H les parties HI, HK, égales chacune à $\frac{aa\sqrt{aa + bb}}{2bb}$; & ſoit décrite du premier axe IK qui ſoit à ſon parametre KL comme aa eſt à bb, une Hyperbole KM. Je dis qu'elle ſera le lieu de l'équation que l'on vient de trouver.

Car $HP = x - \frac{1}{4}a - \frac{a^3}{2bb}$, & par la proprieté de l'Hyperbole $\overline{HP}^2 - \overline{HK}^2\,(xx - \frac{1}{2}ax - \frac{a^3}{bb}x + \frac{1}{16}aa).\ \overline{PM}^2\,(yy) :: IK.\ KL :: aa.\ bb$; ce qui donne, en multipliant les extrêmes & les moyens, l'équation precedente.

Il eſt à propos de remarquer que dans ce cas FN ſera toujours moindre que FP; puiſque l'angle FNM, qu'on a pris égal au complement à deux droits de l'angle donné, eſt obtus. C'eſt pourquoi $\frac{4xy - ay}{4\sqrt{yy + ax}}$ valeur de $FP - FN$ doit être poſitive ; & par conſequent x doit toujours ſurpaſſer $\frac{1}{4}a$. D'où l'on voit que quoiqu'il y ait une portion de l'Hyperbole oppoſée à KM qui ſoit renfermée dans l'angle PAV fait par la ligne AP & par la droite AV menée parallelement à PM & du même côté, elle ne peut pas neanmoins faire partie du lieu des points M; parce que AI étant moindre que $\frac{1}{4}a$, l'indéterminée AP qui ſeroit alors moindre que AI, ſeroit à plus forte raiſon moindre que $\frac{1}{4}a$.

Second cas. Lorſque l'angle donné eſt obtus. En ſuppoſant que les points M tombent dans l'angle PAV, & par un rai-

sonnement semblable à celui du premier cas, on trouvera la même équation; & par consequent la construction du lieu demeurera la même. Mais il faut observer dans ce second cas que FN sera plus grande que FP, & qu'ainsi la valeur $\frac{4xy-ay}{4\sqrt{yy+ax}}$ de $FP - FN$ deviendra negative; d'où il suit que x sera toujours moindre que $\frac{1}{4}a$, & partant que le lieu cherché sera alors la portion de l'Hyperbole qui s'étend du même côté de la Parabole, laquelle se trouve renfermée dans cet angle PAV. Et comme en supposant que les points M tombent dans l'angle DAV, on trouve encore la même équation, il s'ensuit que cette Hyperbole entiere sera le lieu de tous les points cherchés M.

De-là il est évident que si une Hyperbole KM est le lieu de tous les points M lorsque l'angle donné BMC est aigu, son opposée sera le lieu de tous ces points lorsque l'angle donné sera égal au complement à deux droits de l'angle BMC, parce qu'alors les lignes données a & b qui déterminent la construction des Hyperboles demeurent les mêmes.

Troisiéme cas. Lorsque l'angle donné est droit. Il est clair que FN est alors égale à FP, & qu'ainsi la valeur $\frac{4xy-ay}{4\sqrt{yy+ax}}$ de $FP - FN$ sera nulle ou zero. D'où l'on voit * que si l'on prend sur l'axe AD prolongé vers son origine A la partie $AP = \frac{1}{4}a$, & qu'on lui mene la perpendiculaire indéfinie PM; cette ligne qui n'est autre que la directrice comme l'on peut voir dans les définitions de la Parabole, sera le lieu cherché. Fig. CXCVI. CXCVII. * Art. 306.

COROLLAIRE.

359. Si l'on mene le demi-second axe HO, & qu'on tire l'hypothenuse KO; les triangles rectangles KHO, NQT seront semblables: car puisque le second axe est moyen proportionnel entre le premier IK & son parametre KL, il s'ensuit que $\overline{KH}^2 . \overline{HO}^2 :: IK . KL :: aa . bb$, & qu'ainsi $KH . HO :: NQ$ (a). QT (b). L'angle HKO (qui selon la définition 11. du 3. Livre, est egal à la moitié de l'angle fait par les Asymptotes de l'Hyperbole KM) sera donc égal à l'angle QNT; Fig. CXCVI. CXCVII.

c'est à dire, à l'angle donné BMC; & on aura $NQ(a).QT(b) :: KH(\frac{aa\sqrt{aa+bb}}{2bb}).HO=\frac{a\sqrt{aa+bb}}{2b}$; & $NQ(a).NT(\sqrt{aa+bb}) :: KH(\frac{aa\sqrt{aa+bb}}{2bb}).KO=\frac{a^3+abb}{2bb}$. Or si l'on pose l'hypothenuse KO du triangle rectangle KHO fait par les deux demi-axes HK, HO, sur le premier axe IK depuis le centre H, en R & S; il est clair * que ces deux points seront les deux foyers de l'Hyperbole KM & de son opposée; & que $RA=\frac{1}{4}a$, puisque $HR=\frac{a^3+abb}{2bb}$ & $AH=\frac{1}{4}a+\frac{a^3}{2bb}$. D'où l'on voit que le foyer R de l'Hyperbole KM est encore le foyer * de la Parabole BAC, & que $SR(\frac{a^3+abb}{bb}).HO(\frac{a\sqrt{aa+bb}}{2b}) :: HO(\frac{a\sqrt{aa+bb}}{2b}).AR(\frac{1}{4}a)$, puisqu'en multipliant les extrêmes & les moyens, on forme le même produit. Ce qui donne lieu à ce Theorême.

* Art. 74.

* Def. 3, 4, 5. I.

FIG. CXCVI. Si sur la distance SR des foyers d'une Hyperbole KM, on prend du côté de S, la partie RA troisiéme proportionnelle à cette distance SR, & à la moitié HO de son second axe; & qu'ayant décrit * une Parabole BAC qui ait pour foyer le point R, & pour axe la ligne AR dont l'origine soit en A, on tire d'un point quelconque M de l'Hyperbole KM deux tangentes MB, MC, à cette Parabole : je dis que l'angle BMC qu'elles comprennent, sera toujours égal à la moitié de l'angle fait par les Asymptotes; & que si l'on prend le point M sur l'Hyperbole opposée, l'angle compris par les tangentes, sera toujours égal au complement à deux droits de la moitié de l'angle fait par les Asymptotes.

* Art. 4.

EXEMPLE VIII.

360. FIG. CXCVIII. UNE ligne droite indéfinie BAP étant donnée de position sur un plan avec deux points fixes A, D, l'un sur cette ligne & l'autre au dehors; on demande le lieu de tous les points M, dont la proprieté soit telle qu'ayant mené de chacun de ces points aux deux points fixes A, D, les droites MA, MD: la ligne AM soit toujours égale à la partie ME de l'autre droite DM, prise entre le point M & le point E où elle rencontre la ligne MP.

Du

Du point donné D & du point M que l'on suppose être l'un des points cherchés, ayant mené les perpendiculaires BD, MP, sur la ligne AP, on nommera les données AB, $2a$; BD, $2b$; & les inconnuës & indéterminées AP, x; PM, y: on aura $AP = PE$; puisque (*hyp.*) $AM = ME$. Or les triangles semblables EBD, EPM, donnent EB ou $AB - AB$ $(2x - 2a)$. BD $(2b)$ :: EP (x). PM (y). En multipliant donc les extrêmes & les moyens, on formera cette équation $xy - ay = bx$, qui renferme la condition marquée dans le Problême, & dont le lieu qui est * une Hyperbole équilatere entre les Asymptotes se construit ainsi. * *Art.* 337.

Soit tirée la ligne AD que l'on divisera par le milieu en C, par où l'on menera les droites CF, CG, l'une parallele & l'autre perpendiculaire à AP: soient décrites entre les Asymptotes CF, CG, indéfiniment prolongées de part & d'autre du point C, par les points D, A, * les deux Hyperboles opposées DM, AM, qui sont * équilateres. Je dis qu'elles seront le lieu complet de tous les points cherchés M. * *Art.* 130. 131. * *Def.* 16. III.

Car les Asymptotes CF, CG, divisent les droites AB, BD en deux parties égales aux points L, K, puisque AD est divisée par le milieu en C; & partant lorsque les points P tombent sur AB prolongée indéfiniment du côté de B, comme l'on vient de supposer en faisant le calcul, la ligne PL ou $CH = x - a$, $HM = y - b$; & par la proprieté * de l'Hyperbole $CH \times HM$ $(xy - ay - bx + ab) = CK \times KD$ (ab) : ce qui donne $xy - ay = bx$. * *Art.* 100.

Si l'on suppose à present que les points P tombent sur BA indéfiniment prolongée du côté de A, ou sur la partie déterminée AB; on trouvera toujours (en observant de faire $AP = - x$, & $PM = - y$ lorsqu'ils tombent de l'autre côté du point A & de la ligne AP) la même équation $xy - ay = bx$, tant par la condition marquée dans le Problême que par la proprieté de l'Hyperbole AM ou DM. Donc &c.

COROLLAIRE.

361. DE-LA il est évident que les parties MR, MS des deux droites AM, DM, comprises entre le point M & l'une ou l'autre des Asymptotes, sont égales entr'elles. Car 1°. Lorsque l'Asymptote, comme CF, est parallele à la ligne AP,

l'angle *RSM* eſt égal à l'angle *AEM*, & l'angle *SRM* à l'angle *MAE*. 2°. Lorſque l'Aſymptote, comme *CG*, eſt perpendiculaire à *AP*, l'angle *RSM* ſera le complement à un droit de l'angle *AEM* à cauſe du triangle rectangle *SLE*, & de même l'angle *SRM* ou ſon oppoſé au ſommet *ARL* eſt le complement à un droit de l'angle *EAM* à cauſe du triangle rectangle *RAL*. Donc puiſque les angles *EAM*, *AEM*, ſont égaux, il s'enſuit que le triangle *RMS* ſera iſoſcelle, & qu'ainſi les côtés *MR*, *MS*, ſeront égaux entr'eux. Ce Corollaire nous fournit le Theorême ſuivant.

Si l'on mene d'un point quelconque *M* d'une Hyperbole équilatere, deux droites *MD*, *MA*, aux extremités d'un de ſes premiers diametres *AD*, leſquelles rencontrent l'une ou l'autre Aſymptote aux points *R*, *S*: je dis que les parties *MR*, *MS*, de ces deux droites ſeront égales entr'elles.

EXEMPLE IX.

362. DEUX cercles *EGF*, *BNO*, dont les centres ſont *C*, *A*,
FIG. CXCIX. étant donnés, & ayant mené par un point quelconque *G* du cercle *EGF* une tangente indéfinie *GNO* qui coupe l'autre cercle *BNO* en deux points *N*, *O*, par leſquels ſoient tirées les tangentes *NM*, *OM*; on demande le lieu de tous les points de concours *M*.

Ayant tiré *MP* perpendiculaire ſur *CA*, qui paſſe par les centres *C* *A*, des cercles donnés; on menera les droites *CG*, *AM*, qui ſeront paralleles, puiſque l'une & l'autre eſt perpendiculaire ſur la même droite *GO* qu'elles rencontrent aux points *G*, *Q*; & on nommera les données *AB* ou *AO*, *a*; *CE* ou *CF* ou *CG*, *b*, *CA*, *c*; & les inconnuës & indéterminées *AP*, *x*; *PM*, *y*. Cela fait, les triangles rectangles ſemblables *AOM*, *AQO*, donneront $AM\,(\sqrt{xx+yy})$. $AO\,(a)$ :: $AO\,(a)$. $AQ = \frac{aa}{\sqrt{xx+yy}}$. Et menant *CH* parallele à *GO*, qui rencontre en *H*, *MA* prolongée, s'il eſt neceſſaire, on aura à cauſe des triangles rectangles ſemblables *MAP*, *CAH*, cette proportion : $PA\,(x)$. $AM\,(\sqrt{xx+yy})$ :: *AH* ou $CG - AQ\,(b - \frac{aa}{\sqrt{xx+yy}})$. $AC\,(c)$; ce qui donne $b\sqrt{xx+yy} = aa + cx$, c'eſt à dire, en ôtant les incommenſurables, l'équa-

tion $yy + \frac{bb-cc}{bb}xx - \frac{2aac}{bb}x - \frac{a^4}{bb} = 0$, dont le lieu eſt * une Parabole, une Ellipſe, ou une Hyperbole ſelon que CE (b) eſt égale, plus grande, ou moindre que CA (c). Voici la conſtruction du dernier cas. * Art. 345.

Soit priſe ſur la ligne AP la partie $AR = \frac{aac}{cc-bb}$ du côté oppoſé à PM; & de part & d'autre du point R les parties RI, RK, égales chacune à $\frac{aab}{cc-bb}$; & ſoit décrite du premier axe IK qui ait pour parametre $KL = \frac{2aa}{b}$ une Hyperbole. Je dis que ſa portion indéfinie DM renfermée dans l'angle PAD fait par la ligne AP & par la droite AD menée parallelement à PM & du même côté, ſera le lieu de cette équation. * Art. 330.

Car par la proprieté de l'Hyperbole, $\overline{RP}^2 - \overline{RI}^2$ $\left(\frac{a^4 + 2aacx}{cc-bb} + xx\right) . \overline{PM}^2$ (yy) :: IK $\left(\frac{2aab}{cc-bb}\right) . KL$ $\left(\frac{2aa}{b}\right)$; ce qui donne l'équation precedente.

Si l'on ſuppoſe à preſent que les points M tombent dans l'angle KAD qui eſt à côté de l'angle PAD, on trouvera encore (en faiſant $AP = -x$) la même équation, d'où il ſuit que la portion déterminée ID de l'Hyperbole IM, avec la moitié entiere de l'Hyperbole qui lui eſt oppoſée ſera le lieu de ces points, & qu'ainſi ces deux Hyperboles oppoſées compoſent le lieu complet de tous les points cherchés M: où l'on doit obſerver que la portion SIT renfermée dans le cercle BNO eſt inutile, puiſqu'aucun des points de concours M des deux tangentes NM, OM, à ce cercle, ne peuvent tomber au dedans.

Il eſt à propos de remarquer que RA $\left(\frac{aac}{cc-bb}\right) = \sqrt{\overline{KR}^2 + \frac{1}{4} IK \times KL}$, comme l'on voit en mettant pour ces lignes leurs valeurs analytiques; & qu'ainſi puiſque le rectangle $\frac{1}{4} IK \times KL$ vaut le quarré de la moitié du ſecond axe, le point A ſera * l'un des foyers de l'Hyperbole IM. Or puiſ- * Art. 74.
que AI ou $AR - RI = \frac{aac-aab}{cc-bb} = \frac{aa}{c+b}$, & $AK = AR + RK = \frac{aac+aab}{cc-bb} = \frac{aa}{c-b}$, il s'enſuit qu'on peut abreger la conſtruction precedente en cette ſorte.

Soient priſes ſur la ligne AC du côté de C, les parties AI, AK, troiſiémes proportionnelles à AF ($c+b$), AB (a), & à AE ($c-b$), AB (a); & ſoient décrites du premier axe IK, & du foyer A * deux Hyperboles oppoſées. Il eſt évi- * Art. 76.
dent qu'elles ſeront le lieu de tous les points cherchés M.

Lorsque *CE* (*b*) est plus grande que *CA* (*c*), la construction de l'Ellipse qui est le lieu des points cherchés *M*, se fera
* *Art.* 322. 324. de la même maniere que pour l'Hyperbole, en observant de prendre la partie *AK* de l'autre côté du point *A* par rapport
FIG. CC. au point *C*. Et enfin lorsque *CE* $(b) = CA$ (c), il n'y aura qu'à prendre sur la ligne *AC* du côté de *C*, la partie *AI* troisiéme proportionnelle à *AF*, *AB*, & décrire ensuite une Pa-
* *Art.* 308. 310. rabole qui ait pour foyer le point *A*, & pour axe la ligne *IA* dont l'origine soit en *I*.

COROLLAIRE I. POUR L'ELLIPSE & LES HYPERBOLES OPPOSE'ES.

363. FIG. CXCIX. DE-LA il est évident que si de l'un des foyers *A* d'une Ellipse ou de deux Hyperboles opposées, dont le premier axe est *IK*, on décrit un cercle quelconque *BNO*; & qu'ayant pris sur cet axe les parties *AE*, *AF*, troisiémes proportionnelles à *AK*, *AB*, & à *AI*, & *AB*, (sçavoir *AE* du côté du point *K*, & *AF* du côté du point *I*) on décrive du diametre *EF* un cercle *EGF*: il est évident, dis-je, que si l'on tire d'un point quelconque *M* de la Section, deux tangentes *MN*, *MO*, au cercle *BNO*, la ligne *ON* qui joint les points touchans étant prolongée, s'il est necessaire, touchera toujours l'autre cercle *EGF*.

COROLLAIRE II. POUR LA PARABOLE.

364. FIG. CC. IL suit encore de la resolution de ce Problême, que si du foyer *A* d'une Parabole *IM* dont l'axe *IA* a son origine en *I*, on décrit un cercle quelconque *BNO*; & qu'ayant pris sur l'axe du côté de son origine, la partie *AF* troisiéme proportionnelle à *AI*, *AB*, on décrive un cercle *AGF* du diametre *AF*; & qu'enfin l'on tire d'un point quelconque *M* de la Parabole deux tangentes *MN*, *MO*, au cercle *BNO*: la ligne *NO* qui joint les points touchans, étant prolongée, s'il est necessaire, touchera toujours le cercle *AGF* en un point *G*.

EXEMPLE X.

365. FIG. CCI. CCII. CCIII. UNE ligne droite indéfinie *AP* étant donnée sur un plan, avec un point fixe *F* hors d'elle; trouver le lieu de tous les

points M, dont la proprieté ſoit telle qu'ayant mené de chacun de ces points une perpendiculaire MP ſur AP, & au point F une ligne droite MF; la raiſon de MP à MF ſoit toujours la même, que celle de la donnée a à la donnée b.

Ayant mené du point donné F ſur la ligne AP la perpendiculaire FA, & du point M que l'on ſuppoſe être l'un des cherchés, une parallele MQ à AP, on nommera la donnée AF, c; & les inconnuës & indéterminées AP, x; PM, y; qui font entr'elles un angle droit APM. Cela poſé, le triangle rectangle MQF donne $\overline{MF}^2 = \overline{FQ}^2$ $(cc - 2cy + yy)$ $+ \overline{MQ}^2$ (xx), & à cauſe de la condition marquée dans le Problême on aura $\overline{MP}^2$ (yy). $\overline{MF}^2$ $(cc - 2cy + yy + xx) :: aa . bb$; d'où (en multipliant les moyens & les extrêmes) on tire cette équation $aayy - bbyy - 2aacy + aaxx + aacc = 0$, dont il s'agit maintenant de conſtruire le lieu. Pour en venir à bout, il faut diſtinguer trois differens cas ſelon que a eſt plus grand, moindre, ou égal à b.

Premier cas. En diviſant par $aa - bb$, on trouve cette équation $yy - \frac{2aac}{aa-bb}y + \frac{aa}{aa-bb}xx + \frac{aacc}{aa-bb} = 0$, dont le lieu eſt une Ellipſe * que l'on conſtruit en cette ſorte. * *Art.* 324.

Soit priſe ſur AF du côté de F, la partie $AC = \frac{aac}{aa-bb}$; & Fig. CCI. ayant mené par le point C une parallele KH à AP, ſoient priſes ſur cette ligne de part & d'autre du point C, les parties CH, CK, égales chacune à $\sqrt{\frac{bbcc}{aa-bb}}$. Enſuite de l'axe KH qui ſoit à ſon parametre KL comme $aa - bb$ eſt à aa, ſoit décrite une Ellipſe. Je dis qu'elle ſera le lieu de l'équation precedente, & par conſequent de tous les points cherchés M.

Car par la proprieté de l'Ellipſe, $KE \times EH$ ou $\overline{CH}^2 - \overline{CE}^2$ $(\frac{bbcc}{aa-bb} - xx)$. $\overline{EM}^2$ $(\frac{a^4cc}{\overline{aa-bb}^2}) - \frac{2aacy}{aa-bb} + yy) :: KH . KL :: aa - bb . aa$; ce qui, en multipliant les extrêmes & les moyens, rend la même équation que ci-deſſus.

Puiſque $\overline{CH}^2 . \overline{CB}^2 :: KH . KL :: aa - bb . aa$, il s'enſuit que le demi-axe CB ou $CD = \frac{abc}{aa-bb}$; & qu'ainſi DF ou $DC + CF = \frac{abc+bbc}{aa-bb} = \frac{bc}{a-b}$, & FB ou $CB - CF = \frac{abc-bbc}{aa-bb} = \frac{bc}{a+b}$. Donc $DF \times FB = \frac{bbcc}{aa-bb} = \overline{CH}^2$; & partant le

*Art. 35. point F est * l'un des foyers de cette Ellipse qui a pour grand axe la ligne BD. Ces remarques nous fournissent une construction beaucoup plus simple que la precedente : La voici.

Soient prises sur FA du côté de A la partie $FB = \frac{bc}{a+b}$, & du côté opposé la partie $FD = \frac{bc}{a-b}$. Ayant pris DG égal à BF du côté de F; soit décrite des foyers F, G, & de l'axe BD

*Art. 36. * une Ellipse ; il est évident qu'elle satisfera à la question.

Second cas. On aura dans ce cas $yy + \frac{2aac}{bb-aa}y - \frac{aa}{bb-aa}xx - \frac{aacc}{bb-aa} = o$, parce que a est moindre que b. Le lieu de cette équation sera deux Hyperboles opposées, que l'on pourra construire selon l'article 332. (Liv. 7). Après avoir fait les mêmes remarques, que dans le cas precedent, on trouvera cette construction.

FIG. CCII. Soient prises sur FA du côté du point A les parties $FB = \frac{bc}{b+a}$, $FD = \frac{bc}{b-a}$. Ayant pris DG égal à BF du côté opposé

*Art. 76. au point F, soient * décrites des foyers F, G, & du premier axe BD, deux Hyperboles opposées BM, DM. Elles seront le lieu de tous les points cherchés M.

Troisiéme cas. L'équation generale $aayy - bbyy - 2aacy + aaxx + aacc = o$ se changeant en cette autre $xx - 2cy + cc = o$, parce que $a = b$, son lieu est une Parabole qu'il

FIG. CCIII. est facile de construire selon l'article 310. (Liv. 7.) mais on voit tout d'un coup & sans avoir besoin d'aucun calcul, que si l'on décrit une Parabole qui ait pour directrice la ligne AP, & pour foyer le point F, selon qu'il est enseigné dans la définition premiere du premier Livre ; elle sera le lieu requis.

COROLLAIRE I.

366. IL est clair dans le premier cas, que $CF\ (\frac{bbc}{aa-bb})\ CB\ (\frac{abc}{aa-bb}) :: CB\ (\frac{abc}{aa-bb}) .\ CA\ (\frac{aac}{aa-bb}) :: b.\ a$; & l'on trouve la même chose dans le second cas : ce qui donne lieu à ce Theorême.

FIG. CCI. CCII. Si dans une Ellipse ou deux Hyperboles opposées qui ont pour centre le point C, pour foyers les deux points F, G, & pour premier axe la ligne BD, on prend CA troisiéme proportionnelle à CF, CB, du côté du foyer F; & qu'on mene la droite indéfinie AP perpendiculaire sur BD : je dis que si d'un point quelconque M de la Section, l'on tire sur AP la perpendiculaire MP, & au foyer F la droite MF; la raison de MP

à *MF*, sera toujours la même que du premier axe *BD* à la distance *FG* des foyers.

Dans les Corollaires suivans cette ligne droite indéfinie *AP* s'appellera *Directrice* à l'égard de ces deux Sections; aussi-bien qu'à l'égard de la Parabole. D'où l'on voit qu'il est facile de décrire une Section conique qui ait pour foyer un point donné *F*, pour directrice une ligne donnée de position *AP*, & qui passe par un point donné *M*: car tirant au foyer *F* la ligne *MF*, & sur la directrice *AP* la perpendiculaire *MP*, & nommant les données *MP*, *a*; *MF*, *b*; il n'y aura qu'à décrire le lieu des points *M* tels que *MP* soit toujours à *MF* comme *a* est à *b*.

COROLLAIRE II.

367. Si l'on joint deux points quelconques *M*, *N*, d'une Section conique, par une ligne droite qui rencontre la directrice en *C*; & que du foyer *F*, on tire les droites *FM*, *FN*, *FC*: je dis que la ligne *FC* coupe en deux parties égales l'angle *NFH* complement à deux droits de l'angle *NFM*, lorsque les points *M*, *N*, tombent sur une Parabole, Ellipse, ou Hyperbole; & l'angle *NFM*, lorsqu'ils tombent sur deux Hyperboles opposées. FIG. CCIV. CCV.

Car tirant les perpendiculaires *MP*, *NQ*, sur la directrice, & la ligne *ND* parallele à *MF*, les triangles semblables *MPC*, *NQC*, & *MFC*, *NDC*, donnent *MP*. *NQ* :: *MC*. *NC* :: *MF*. *ND*. Et partant *MP*. *MF* :: *NQ*. *ND*. Or par la proprieté de la Section conique qui a pour directrice la ligne *PQ*, & pour foyer le point *F*, on aura *MP*. *MF* :: *NQ*. *NF*. Les lignes *ND*, *NF*, seront donc égales entr'elles; c'est pourquoi dans le premier cas l'angle *NDF* ou *CFH* sera égal à l'angle *CFN*, & dans le second l'angle *FDN* ou *CFM* sera égal à l'angle *CFN*. Ce qu'il falloit prouver.

COROLLAIRE III.

368. De-là on voit comment on peut décrire une Parabole, Ellipse, ou Hyperbole qui passe par trois points donnés *M*, *N*, *O*, & qui ait pour foyer le point donné *F*. FIG. CCIV.

Soient menées par le foyer *F*, les droites *FC*, *FE*, qui divisent par le milieu les angles *NFH*, *NFK*, complemens à deux droits des angles donnés *MFN*, *OFN*; & par les

points *C*, *E*, où elles rencontrent les lignes *MN*, *ON*, qui joignent les points donnés, soit tirée une ligne droite indéfinie *CE*. Soit décrite une Section conique qui ait pour directrice la ligne *CE*, pour foyer le point *F*, & qui passe par le point *M*: il est clair selon le Corollaire precedent qu'elle passera aussi par les deux autres points *N*, *O*.

COROLLAIRE IV.

369. Fig. CCV. ON tire encore du Corollaire second une maniere de decrire deux Hyperboles opposées qui ayent pour foyer le point *F*; & dont l'une d'elles passe par deux points donnés *M*, *O*, & l'autre par un point donné *N*.

Soit menée par le point *F* la ligne *FE* qui divise par le milieu l'angle *HFO* complement à deux droits de l'angle *MFO* formé par les droites *FM*, *FO*, tirées du point *F* aux deux points *M*, *O*, qui doivent se trouver dans la même Hyperbole; & soit encore menée par le même point *F* la ligne *FC*, qui divise en deux parties égales l'angle *MFN* formé par les droites *FM*, *FN*, tirées du point *F* aux deux points *M*, *N*; qui doivent tomber sur les deux Hyperboles opposées. Par les points *E*, *C*, où les lignes *FE*, *FC*, rencontrent les droites *MO*, *MN*, qui joignent les points donnés, soit tirée une ligne droite indéfinie *EC*. Soient enfin décrites deux Hyperboles opposées, qui ayent pour foyer le point *F*, pour directrice la ligne *EC*, & dont l'une d'elles passe par le point *M*: il est évident qu'elles satisfont à la question.

COROLLAIRE V.

370. Fig. CCIV. LES mêmes choses étant posées que dans le Corollaire second, il est visible que l'angle *MFN* difference de l'angle *CFM* & de son complement à deux droits *CFH* ou *CFN*, diminuë à mesure que le point *N* approche du point *M*; de sorte qu'il s'évanoüit tout-à-fait, lorsque le point *N* tombe sur le point *M*. L'angle *CFM* sera donc égal alors à son complement à deux droits, & par consequent il sera droit. Or comme la ligne *MN* devient alors la tangente *MT*, puisqu'elle passe * par deux points infiniment proches de la courbe; on voit naître une maniere generale & toute nouvelle de mener d'un point

* Art. 188.

point donné M sur une Section conique, une tangente MT, un foyer F avec l'axe qui passe par ce foyer étant donnés.

Car ayant trouvé la directrice comme il est enseigné dans le Corollaire second, on menera du point donné M au foyer F la droite MF, sur laquelle on tirera la perpendiculaire FT qui rencontre la directrice en T, par où & par le point donné M on tirera la tangente cherchée MT.

EXEMPLE XI.

371. DEUX angles KAM, KBM, mobiles autour des points fixes A, B, étant donnés sur un plan, avec une ligne droite indéfinie FK qui ne passe par aucun de ces points; soit imaginé le point de concours K des deux côtés AK, BK, se mouvoir le long de la droite FK, & soit proposé de trouver la nature de la ligne courbe que décrit dans ce mouvement le concours M des deux autres côtés AM, BM, prolongés lorsqu'il est necessaire de l'autre côté des points A, B. FIG. CCVI.

Sur AB, comme corde, je décris de l'autre côté du point M, un arc de cercle capable d'un angle BDA qui vaille quatre droits moins les deux angles donnés KAM, KBM; & ayant achevé le cercle entier dont cet arc fait partie, il peut arriver que la droite indéfinie FK tombe toute entiere au dehors de ce cercle, ou qu'elle passe au dedans, ou enfin qu'elle le touche ce qui fait trois differens cas que j'explique en particulier.

Premier cas. Du centre C du cercle $BDAE$ je mene sur FK, la perpendiculaire CF qui le rencontre aux points D, E; & je fais passer par le point D (plus proche de la ligne FK que l'autre point E) les deux côtés DA, DB, des deux angles DAP, DBQ, égaux aux angles KAM, KBM, lesquels côtés étant prolongés vers D rencontrent la ligne FK, aux points G, H. Or par la construction l'angle BDA plus les deux angles DAP, DBQ, vaut quatre droits; & comme le même angle BDA plus les deux angles DAB, DBA, vaut deux droits; il s'ensuit que les angles BAP, ABQ, vallent deux droits, & qu'ainsi les lignes AP, BQ, sont paralleles entr'elles. Cela posé.

Soit mené du point K sur les deux côtés AD, BD, les perpendiculaires KR, KS; & des points A, M, sur les deux

autres côtés BQ, AP, les perpendiculaires AI, MP, qui rencontrent BQ, aux points I, Q. Soient les données $FE = a$, $FD = b$, $BI = c$, $AI = d$, $FG = g$, $FH = b$, $DG = m$, $DH = n$; & les inconnuës $FK = z$, $AP = x$, $PM = y$; & à cauſe des triangles rectangles ſemblables, GDF, GKR, on aura ces deux proportions : $GD\ (m) . GF\ (g) :: GK\ (z - g) . GR = \frac{gz - gg}{m}$. Et $GD\ (m) . DF\ (b) :: GK\ (z - g) . KR = \frac{bz - bg}{m}$. Or les triangles rectangles ſemblables GDF, EDA, donnent auſſi $GD\ (m) . DF\ (b) :: ED\ (a - b) . AD = \frac{ab - bb}{m}$, & partant $AD + DG$ ou $AG = \frac{ab - bb + mm}{m}$, & $AG + GR$ ou $AR = \frac{ab - bb + mm + gz - gg}{m} = \frac{ab + gz}{m}$; parce que $mm = bb + gg$ à cauſe du triangle rectangle DFG. Mais les triangles rectangles ARK, APM ſont ſemblables; car retranchant des angles égaux KAM, DAP le même angle KAP, les reſtes KAR, PAM ſeront égaux ; & par conſéquent $AR\ (\frac{ab + gz}{m}) . RK\ (\frac{bz - bg}{m}) :: AP\ (x) . PM\ (y)$, d'où l'on tire $z = \frac{aby + bgx}{bx - gy}$.

Maintenant les triangles rectangles ſemblables HDF, HKS donnent $HS = \frac{bz + bb}{n}$, $KS = \frac{bz + bh}{n}$; & les triangles rectangles ſemblables HFD, EBD, donnent $DH\ (n) . DF\ (b) :: DE\ (a - b) . DB = \frac{ab - bb}{n}$. Et partant $BD + DH$ ou $BH = \frac{ab - bb + nn}{n}$, & $BH - HS$ ou $BS = \frac{ab - bb + nn - bz - bb}{n} = \frac{ab - bz}{n}$, parce que $nn = bb + bb$ à cauſe du triangle rectangle DFH. Or les triangles rectangles BSK, BQM, ſont ſemblables ; car retranchant des angles égaux DBQ, KBM, le même angle DBM, les reſtes KBS, MBQ, ſeront égaux ; & par conſéquent $BS\ (\frac{ab - bz}{n}) . SK\ (\frac{bz + bb}{n}) :: BQ\ (x - c) . QM\ (y + d)$. D'où l'on tire $z = \frac{aby - bhx + bch + abd}{bx + hy - bc + hd}$.

Comparant cette derniere valeur de z avec la précedente, multipliant en croix, en faiſant pour abreger $GH\ (g + b) = f$, on arrive enfin en diviſant par abf à cette équation.

$$\begin{array}{llll} yy + dy & + \frac{b}{a}xx & - \frac{bc}{a}x & = 0. \\ \quad - \frac{bc}{f} & & - \frac{bd}{f} & \\ \quad + \frac{cgh}{af} & & + \frac{dgh}{af} & \end{array}$$

dont le lieu que l'on pourra conſtruire ſelon l'article 324. (Liv. 7.) ſera une Ellipſe, parce que le terme $\frac{b}{a}xx$ ſera toujours precedé dans ce premier cas du ſigne +, en quelque ſituation que ſe puiſſent trouver les points A, B, K.

Second cas. Après avoir nommé les lignes par les mêmes lettres que dans le premier cas, & fait les mêmes raisonnemens; on arrivera à cette équation. FIG. CCVII.

$$\begin{array}{llll} yy + dy & - \frac{b}{a}xx & + \frac{bc}{a}x & = 0. \\ \quad - \frac{bc}{f} & & - \frac{bd}{f} & \\ \quad - \frac{cgb}{af} & & - \frac{dgb}{af} & \end{array}$$

qui ne differe de la precedente que dans quelques signes, & dont le lieu que l'on pourra construire selon l'article 332. (Liv. 7.) sera toujours deux Hyperboles opposées, parce que le terme $\frac{b}{a}xx$ sera toujours precedé du signe — dans ce second cas.

Comme le plan xy ne se rencontre point dans les deux équations precedentes, & que l'angle APM est droit; on connoît d'abord que l'un des axes de l'Ellipse dans le premier cas, & des Hyperboles opposées dans le second doit être parallele aux lignes AP, BQ; & qu'il a avec son parametre la même raison que EF (a) à FD (b), parce que la fraction $\frac{b}{a}$ qui multiplie le quarré xx exprime ce rapport.

Lorsque le point K en parcourant la ligne indéfinie KF arrive au point O où cette ligne rencontre la circonference, il est clair que les côtés AM, BM, qui décrivent par leur point de concours M l'Hyperbole BAM deviennent paralleles entr'eux; qu'ils se coupent vers le côté opposé, pendant que le point K parcourt la partie OL de la ligne KF renfermée dans la circonference; qu'ils deviennent encore paralleles, lorsque le point K tombe en L, après quoi ils se rencontrent de nouveau vers le même côté. D'où l'on voit que le point M décrit l'Hyperbole BAM, pendant que le point K parcourt les deux parties indéfinies de la droite KF qui tombent de part & d'autre de la circonference; & qu'il décrit son opposée, pendant que le point K parcourt la partie OL renfermée dans la circonference.

Troisiéme cas. Comme dans ce troisiéme cas la droite indéfinie FK touche la circonference du cercle $BDAE$ en quelque point F, il est clair que le point D des deux autres cas se confond ici avec le point F, & qu'ainsi les triangles DFG, DFH, s'évanoüissent: c'est pourquoi on se servira en leur place des triangles DAE, DBE, de la maniere qui suit. FIG. CCVIII.

Soient les données $AE = a$, $EB = b$, $EF = m$, $AF = g$,

$BF = b$, $BI = c$, $AI = d$; & les inconnuës $FK = z$, $AP = x$, $PM = y$. Les triangles rectangles *FKR*, *EFA* sont semblables ; car l'angle *KFR* ou son opposé au sommet *TFA* fait par la tangente *FT* & la corde *FA*, a pour mesure la moitié de l'arc *AF* ; de même que l'angle *FEA* : Et partant $FE\ (m) . EA\ (a) :: KF\ (z) . FR = \frac{az}{m}$. Et $EF\ (m) . FA\ (g) :: FK\ (z) . KR = \frac{gz}{m}$. Or les triangles rectangles semblables *ARK*, *APM*, donnent *AR* ou $AF + FR\ (\frac{az + gm}{m}) . RK\ (\frac{gz}{m}) :: AP\ (x) . PM\ (y)$; d'où l'on tire $z = \frac{gmy}{gx - ay}$. On trouvera de même, à cause des triangles rectangles semblables *EFB*, *FKS*, que $FS = \frac{bz}{m}$, & $KS = \frac{hz}{m}$; & à cause des triangles rectangles semblables *BSK*, *BQM*, que *BS* ou $BF - FS\ (\frac{bm - bz}{m}) . SK\ (\frac{hz}{m}) :: BQ\ (x - c) . QM\ (y + d)$; ce qui donne $z = \frac{bmy + hmd}{hx - ch + bd + by}$.

Comparant ces deux valeurs de z, multipliant en croix, & mettant par ordre les termes, on trouve cette équation $yy + dy - \frac{cgh}{ah + bg} y - \frac{dgh}{ah + bg} x = 0$, dont le lieu sera toujours une Parabole que l'on peut construire selon l'article 310. (Liv. 7.) & qui aura son axe parallele aux droites *AP*, *BQ*.

Il est donc évident 1°. Que le lieu de tous les points cherchés *M* sera toujours une Section conique, dont l'axe ou l'un des axes sera parallele aux lignes *AP*, *BQ* ; & en particulier qu'il sera une Ellipse dans le premier cas, deux Hyperboles opposées dans le second, & une Parabole dans le troisiéme ; & que dans le premier & le second cas, l'axe qui est parallele à *AP*, aura avec son parametre, la même raison que *EF* à *FD*. 2°. Que dans le premier & le troisiéme cas les deux points fixes *A*, *B*, autour desquels tournent les angles mobiles *KAM*, *KBM* tomberont toujours du même côté de la ligne *FK*, au lieu que dans le second ils peuvent tomber non seulement du même côté de cette ligne, mais encore de part & d'autre ; parce que la circonference du cercle *ADBE* sur laquelle ils sont situés, est coupée alors en deux portions par la ligne *FK*.

REMARQUE I.

372. 1°. UNE ligne quelconque qui passe par l'un des points fixes *A* ou *B*, comme *AM*, étant donnée, on pourra toujours trouver sur cette ligne le point *M* où elle rencontre la Section

FIG. CCVI. CCVII, CCVIII.

qui est le lieu requis, en cette sorte. Ayant mené la droite *AK* qui fasse avec *AM* l'angle *MAK* égal à l'angle donné qui doit tourner autour du point fixe *A*, on menera du point *K* où elle rencontre la droite *FK*, par le point fixe *B*, l'angle *KBM* égal à l'autre angle donné, qui doit tourner autour de l'autre point fixe *B*; & le point *M* où le côté *BM* de cet angle rencontre la ligne *AM*, sera celui qu'on cherche. 2°. Lorsque le point *K* en parcourant la ligne *FK*, se trouve tellement situé que le côté *AM* de l'angle *KAM* tombe sur la ligne *AB*; il est visible que le point de concours *M* des deux côtés *AM*, *BM*, tombe alors sur le point *B*, & qu'ainsi le lieu des points *M* passe par le point fixe *B*; on prouvera de même qu'il passe par le point *A*.

De-là on voit que pour décrire la Section conique qui est le lieu des points cherchés *M*, sans avoir besoin des équations precedentes, il n'y a qu'à mener comme dans l'exemple les droites *AP*, *AI*; sur lesquelles ayant trouvé, selon cette remarque, les points où elles rencontrent la Section, & achevé le rectangle qui a pour côtés ces deux lignes, il n'y aura qu'à décrire * autour de ce rectangle, l'Ellipse ou les deux Hyperboles opposées (selon que *FK* tombe au dehors ou au dedans du cercle), dont l'axe qui est parallele à *AP* soit à son conjugué, comme le quarré de *EF* est au quarré de *DF*. Si la Section est une Parabole (ce qui arrive lorsque la ligne *KF* touche le cercle *BDA*); on trouvera sur la ligne *AI* le point où elle rencontre la Section, & on décrira selon l'article 170. (Liv. 4.) une Parabole qui passe par ce point, & par les deux autres donnés *A*, *B*; & dont les diametres soient paralleles aux lignes *AP*, *BQ*.

FIG. CCVI. — * Art. 176. & 178. — FIG. CCVIII.

REMARQUE II.

373. LORSQUE le point *K* en parcourant la ligne *FK* est tellement situé que le côté *AM* de l'angle *KAM* tombe sur *AB*, il est clair non-seulement que le point *M* tombe en *B*; mais aussi que le côté *BM* de l'angle *KBM* devient tangente * en *B* de la ligne courbe qui est le lieu du point *M*, puisque le point *M* peut être regardé alors comme étant infiniment près du point *B*. D'où il suit que pour mener une tangente de ce lieu en *B*, il n'y a qu'à mener par le point *A* une ligne droi-

FIG. CCIX. — * Art. 188.

te AC qui fasse avec BA un angle BAC égal à l'angle donné KAM, & tirer ensuite une ligne BD, qui fasse avec BC l'angle CBD égal à l'autre angle donné KBM; car le côté BM de cet angle, qui devient BD, touchera la Section en B. Il en est de même de l'autre point fixe A.

FIG. CCIX. De-là on tire encore une maniere très-facile de décrire la Section conique qui est le lieu de tous les points M sans avoir besoin des équations precedentes, ni même d'aucun calcul. Ayant mené par le point fixe B une tangente BD, & par l'autre point fixe A une parallele AE à cette tangente, on trouvera * sur cette ligne le point E où elle rencontre la Section, & l'ayant divisée par le milieu en H on tirera BH, sur laquelle on cherchera * aussi le point G où elle rencontre la Section. Cela fait, on décrira * du diametre BG & de l'ordonnée HA ou HE, une Section conique, qui sera celle qu'on demande. Car il est visible que la ligne BG qui divise par le milieu en H la ligne AE terminée par la Section & parallele à la tangente en B, en sera un diametre qui aura pour ordonnée la ligne AH. Où l'on doit remarquer que lorsque le point H tombe entre les points B, G, la Section est une Ellipse; que lorsqu'il tombe de part ou d'autre de ces deux points, ce sont deux Hyperboles opposées; & qu'enfin lorsque la ligne BG est infinie, la Section est une Parabole.

*Art. 372.

*Art. 372.

*Art. 162. 161.

COROLLAIRE I.

374. CET exemple nous fournit le moyen de faire passer par quatre points donnés A, B, H, M, une Section conique d'une espece déterminée.

FIG CCX.

Car 1°. Soit la Section conique une Ellipse, dont le grand axe soit à son parametre, en la raison donnée de a à b. Je forme le triangle ABH, en joignant trois des points donnés par des lignes droites; & du quatriéme point M, je fais passer par les points A, B, les angles MAK, MBK, égaux aux angles GAH, RBA, complements à deux droits des angles HAB, HBA. Je décris sur AB comme corde de l'autre côté du point M un arc de cercle BDA capable d'un angle qui vaille quatre droits moins les deux angles KAM, KBM; & du centre C de cet arc, je décris un autre cercle dont le rayon CF soit au rayon CD du premier, comme $a + b$ est à $a - b$; & du

point de concours K des deux côtés AK, BK, des angles MAK, MBK, je tire une tangente KF à ce dernier cercle. Maintenant je dis que si l'on fait mouvoir le point K le long de la droite indéfinie FK; le point de concours M des deux autres côtés AM, BM, prolongés lorsqu'il sera necessaire de l'autre côté des points A, B, décrira dans ce mouvement l'Ellipse qu'on demande. Car il est évident selon ce qu'on a dit dans le premier cas de l'exemple, que le lieu des points M sera une Ellipse, dont le grand axe sera à son parametre comme EF (a) à DF (b); & de plus qu'elle passera par les points A, M, B, H, puisque le point K étant en G, le côté AM tombera sur AH, le côté BM sur BR.

2°. Lorsque c'est une Hyperbole ou deux Hyperboles opposées qu'il est question de décrire par quatre points donnés A, B, H, M, & dont le grand axe soit à son parametre en la raison donnée de a à b; la construction demeure la même, excepté que le rayon CF du cercle concentrique, au cercle $BDAE$, doit étre au rayon CD, comme $a - b$ est à $a + b$.

3°. Lorsqu'il s'agit de décrire une Parabole par quatre points donnés A, B, H, M. Ayant décrit comme dans le premier cas le cercle $BDAE$, on menera du point de concours K une tangente à ce cercle, qui sera la droite indéfinie sur laquelle faisant mouvoir le point K, l'autre point de concours M décrira la Parabole qu'on demande.

Comme l'on peut mener d'un même point deux tangentes à un cercle, il s'ensuit qu'on peut décrire deux differentes Sections coniques qui satisfont également lorsque le Problême est possible; car lorsque le point K tombe au dedans du cercle qui a pour rayon CF, il est visible que le Problême est impossible.

On pourra décrire la Section conique par le moyen de ses axes en se servant de l'article 372. ou par le moyen d'un de ses diametres & d'une ordonnée à ce diametre, en se servant de l'article 373.

COROLLAIRE II.

375. On tire encore de cet exemple, une nouvelle maniere de décrire une Section conique qui passe par cinq points donnés A, B, H, M, N. Car ayant joint trois quelconques de ces Fig. CCXI.

points *A*, *B*, *H*, par des lignes droites, on fera paſſer par les autres points *M*, *N*, & par les deux points fixes *A*, *B*, les angles *MAK*, *NAS*, égaux chacun à l'angle *HAG* complement à deux droits de l'angle *HAB*, & les angles *MBK*, *NBS* égaux chacun à l'angle *ABR* complement à deux droits de l'angle *ABH*; & on tirera par les points de concours *K*, *S*, une ligne droite indéfinie *S K*, ſur laquelle faiſant mouvoir le point *K*, il eſt clair que le point de concours *M* decrira dans ce mouvement la Section conique qu'on demande ; puiſqu'elle paſſera par les cinq points donnés *A*, *B*, *H*, *M*, *N*.



LIVRE



LIVRE NEUVIÉME.

De la construction des Egalités.

PROPOSITION I.

Problême.

376. *CONSTRUIRE toute égalité donnée, dans laquelle l'inconnuë ne se trouve qu'au premier degré.*

Soit en premier lieu l'inconnuë x égale à une ou à plusieurs fractions simples, telles que $\frac{ab}{c}$, ou $\frac{abe}{cf}$, ou $\frac{abeh}{cfg}$ &c. Ayant fait $c.b :: a.l$, il est clair que cette quatriéme proportionnelle $l = \frac{ab}{c}$; & si l'on fait $f.l :: e.m$, l'on aura $m = \frac{el}{f} = \frac{abe}{cf}$; & faisant enfin $g.m :: h.n$, il vient $n = \frac{mh}{g} = \frac{abeh}{cfg}$ en mettant pour m sa valeur $\frac{abe}{cf}$. De sorte qu'on aura l'inconnuë x égale à l, ou à m, ou à n, &c. selon que x sera égale à $\frac{ab}{c}$, ou à $\frac{abe}{cf}$, ou à $\frac{abeh}{cfg}$ &c. Or il est visible qu'en augmentant le nombre des proportions, autant qu'il sera necessaire, on trouvera toujours une ligne droite égale à une fraction simple donnée, tel que puisse être le nombre des dimensions de son numerateur. D'où l'on voit que l'on pourra toujours trouver une ligne x égale à une quantité composée de plusieurs fractions simples; car ayant trouvé en particulier des lignes droites égales à chacune de ces fractions, il n'y aura qu'à les ajouter, ou retrancher selon qu'il sera marqué par les signes $+$ & $-$. Qu'il faille, par exemple, trouver une ligne $x = a + \frac{ab}{c} + \frac{aab}{cf} - \frac{aacc}{bi}$, on ajoutera les deux lignes $h = \frac{ab}{c}$ & $l = \frac{aab}{cf}$ à la li-

gne a pour en composer une seule, de laquelle ayant retranché la ligne $m = \frac{aacc}{b^3}$, le reste sera la valeur cherchée de l'inconnuë x, c'est à dire qu'on aura $x = a + b + l - m$.

Soit en second lieu l'inconnuë x égale à une ou à plusieurs fractions composées, c'est à dire, dont les dénominateurs ayent plusieurs termes. On cherchera d'abord, comme l'on vient d'enseigner ci-dessus, une ligne égale au dénominateur divisé par une ligne arbitraire, lorsque chacun de ses termes n'a que deux dimensions, par un plan lorsqu'ils en ont trois, par un solide lorsqu'ils en ont quatre, &c; ce qui reünira tous les termes du dénominateur en un seul, lequel étant substitué en leur place, changera la fraction composée en une ou en plusieurs simples selon que le numerateur est composé d'un ou de plusieurs termes; & ayant trouvé comme ci-dessus une ligne qui leur soit égale, elle sera celle qu'on cherche. Ceci s'éclaircira par les exemples qui suivent.

On demande une ligne $x = \frac{agc - bce}{bb + af}$, je cherche d'abord une ligne $m = f + \frac{bb}{a}$, c'est à dire égale au dénominateur $af + bb$ divisé par la ligne a; ce qui donne $bb + af = am$, & ayant trouvé ensuite une ligne $n = \frac{agc - bce}{am} = \frac{gc}{m} - \frac{bce}{am}$; il est clair que la ligne cherchée $x = n$. De même si l'on demandoit une ligne $x = \frac{a^3b + aacc - abcf}{aaf + ccf + bff}$, on trouveroit une ligne $m = a + \frac{cc}{a} + \frac{bf}{a}$, c'est à dire égale au dénominateur $aaf + ccf + bff$ divisé par le plan af; ce qui donne $afm = aaf + ccf + bff$, & ensuite une autre ligne $= \frac{a^3b + aacc - abcf}{afm} = \frac{aab}{fm} + \frac{acc}{fm} - \frac{bc}{m} = x$. Il en est ainsi de tous les autres exemples que chacun se peut former à plaisir.

Il est inutile d'avertir que si l'on demandoit une ligne x égale à une ou à plusieurs fractions tant simples que composées; il faudroit chercher en particulier des lignes égales à chacune de ces fractions, pour les ajouter ensuite ou les retrancher les unes des autres, selon que les signes $+$ ou $-$ le feroient connoître.

COROLLAIRE I.

377. Il est facile par le moyen de cette Proposition de trouver 1°. Une fraction simple $\frac{x}{a}$ ou $\frac{a}{x}$, dont le dénominateur ou le numerateur a soit donné, égale à une ou à plusieurs fractions simples ou composées; car il n'y aura qu'à trouver une ligne x

égale à la ligne a multipliée ou divisée par ces fractions. Qu'il faille trouver par exemple, une fraction $\frac{x}{a} = \frac{ee + ff}{af + ef} + \frac{aa}{gg}$, il est visible qu'il n'y aura qu'à trouver une ligne $x = \frac{aee + aff}{af + ef} + \frac{a^3}{gg}$. 2°. Un plan ax, dont l'un des côtés a est donné, égal à un ou à plusieurs plans si composé qu'ils puissent être; car il ne faut pour cela que trouver une ligne x égale à tous ces plans divisés par a. 3°. Un solide aax ou abx, dont deux des côtés a, a, ou a, b, sont donnés, égal à plusieurs solides; puisqu'il ne faut pour cela que trouver une ligne x égale à tous ces solides divisés pas le quarré aa ou par le plan ab. 4°. Un sursolide a^3x ou $abcx$ dont trois côtés a, a, a, ou a, b, c, sont donnés, égal à plusieurs sursolides; puisqu'il ne faut encore pour cela que trouver une ligne x égale à tous ces sursolides divisés par le cube a^3 ou par le solide abc. Et il en est de même de plusieurs produits de cinq dimensions, de six &c. que l'on peut toujours reduire en un seul dont tous les côtés, excepté un, soient donnés.

COROLLAIRE II.

378. DE-LA on voit que pour trouver un quarré égal à plusieurs plans donnés, il les faut reünir tous en un seul, & trouver ensuite une moyenne proportionnelle entre ses deux côtés; car il est clair qu'elle sera le côté du quarré qu'on demande. Qu'il faille, par exemple, trouver un quarré $xx = ss - \frac{acee - eehh}{bb + af}$ (les lignes a, b, c, e, f, b, s, sont données), je cherche une ligne $m = \frac{ss}{e} - \frac{ace - ehh}{bb + af}$ pour avoir un plan $em = ss - \frac{acee - eehh}{bb + af}$, & ayant trouvé une moyenne proportionnelle x entre les deux côtés e, m, du plan em, il est clair que $xx = em = ss - \frac{acee - eehh}{bb + af}$.

Pour trouver une ligne x dont le quarré x^4 soit égal à plusieurs sursolides donnés; je cherche, comme ci-dessus, un quarré zz égal à tous les sursolides donnés divisés par le quarré aa donné ou pris à volonté. Je prends ensuite une moyenne proportionnelle x entre les deux lignes a & z, & je dis qu'elle sera celle qu'on demande; car $xx = az$, &, en quarrant chaque membre, $x^4 = aazz$, c'est à dire x^4 égal à tous les sursolides donnés.

REMARQUE.

379. QUOIQUE la methode que l'on vient d'expliquer ſoit generale pour tous les cas poſſibles, il ne s'enſuit pas neanmoins qu'elle ſoit toujours la plus ſimple. C'eſt pourquoi je vais donner ici des exemples particuliers que l'on reſoud d'une maniere plus aiſée en s'écartant un peu de la methode generale, & qui pourront ſervir de methode pour tous les cas ſemblables.

1°. Soit $x = \frac{abcc - aabb}{abc + c^3}$. Je cherche d'abord une ligne $m = \frac{ab}{c}$, & ſubſtituant à la place de ab ſa valeur cm, je trouve $x = \frac{c^3m - ccmm}{ccm + c^3} = \frac{cm - mm}{m + c}$; d'où je connois qu'en faiſant $c + m . c - m :: m . n$, j'ai cette quatriéme proportionnelle $n = x$. Il eſt donc viſible qu'on n'a eu beſoin que de deux proportions pour trouver la valeur de x, au lieu que ſi l'on tente la methode generale, on trouvera qu'il en faut au moins trois.

2°. Soit $x = \sqrt{aa + bb}$. Je fais un triangle rectangle, dont l'un des côtés $= a$, & l'autre $= b$; & ſon hypothenuſe ſera la valeur de x. S'il falloit trouver une ligne $x = \sqrt{aa - bb}$, il n'y auroit qu'à trouver une moyenne proportionnelle x entre les deux lignes $a + b$ & $a - b$; car ſon quarré xx doit être égal au produit des extrêmes $aa - bb$. Ou bien je fais un triangle rectangle dont l'hypothenuſe $= a$, & l'un des côtés $= b$; & l'autre côté ſera la valeur de x.

3°. Soit $xx = ss + 4ee - \frac{4ccee}{aa}$. Je prends l'hypothenuſe m d'un triangle rectangle dont l'un des côtés $= s$, & l'autre $= 2e$, & ayant trouvé une autre ligne $n = \frac{2ce}{a}$, j'ai $xx = mm - nn$ & $x = \sqrt{mm - nn}$ que je reſous comme je viens de faire $x = \sqrt{aa - bb}$ dans l'exemple precedent.

4°. Soit enfin $xx = ss - \frac{ccee - eebb}{bb + af}$. Je prends une moyenne proportionnelle entre les côtés a, f, du plan af, pour avoir un quarré $ll = af$, je trouve enſuite un quarré $mm = bb + ll$, & un autre quarré $nn = cc + bb$ par le moyen de deux triangles rectangles, comme dans le ſecond exemple, & j'ai par la ſubſtitution $xx = ss - \frac{eenn}{mm}$; & trouvant enfin une ligne $g = \frac{en}{m}$, il vient $x = \sqrt{ss - gg}$ que l'on reſoud comme ci-deſſus..

PROPOSITION II.

Problême.

380. *TROUVER les racines de toutes sortes d'Egalités du second degré.*

Toutes les Egalités du second degré se peuvent réduire à l'une de ces deux formes, $xx \mp ax - bb = o$, ou $xx \mp ax + bb = o$; en trouvant une ligne a * égale à toutes les quantités connuës qui multiplient l'inconnuë x, & un quarré bb * égal à tous les plans entierement connus. Cela posé. * *Art.* 376. * *Art.* 378.

1°. Soit $xx \mp ax - bb = o$. Je forme un angle droit CAB dont l'un des côtés $CA = \frac{1}{2}a$, & l'autre côté $AB = b$; & ayant mené l'hypothenuse BC prolongée au de-là de C, je décris du centre C & du rayon CA, un cercle qui coupe BC en deux points E, D. Je dis que les droites BD, BE, sont les deux racines de l'égalité proposée $xx \mp ax - bb$: sçavoir BE la racine vraie, & BD la fausse de l'égalité $xx + ax - bb = o$, & au contraire BD la vraie & BE la fausse de l'égalité $xx - ax - bb = o$. FIG. CCXII.

Car faisant $BE = x$, on aura BD ou $BE + ED = a + x$; & si l'on fait $BD = -x$, on trouvera BE ou $BD - ED = -x - a$. Donc en l'un & l'autre cas $DB \times BE = xx + ax = \overline{AB}^2$ (bb) par la proprieté du cercle, c'est à dire $xx + ax - bb = o$. Au contraire si l'on fait $BD = x$, ou $BE = -x$, on trouvera $DB \times BE = xx - ax = bb$ ou $xx - ax - bb = o$.

2°. Soit $xx \mp ax + bb = o$. Je forme comme dans le premier cas, un angle droit CAB dont l'un des côtés $CA = \frac{1}{2}a$, & l'autre $AB = b$; & ayant mené une droite indéfinie BD parallele à AC, je décris du centre C & du rayon CA un arc de cercle qui coupe la ligne BD aux points E, D. Je dis que les droites BE, BD, sont les racines de l'égalité proposée $xx \mp ax + bb = o$: sçavoir les deux vraies de l'égalité $xx - ax + bb = o$, & les deux fausses de l'égalité $xx + ax + bb = o$. FIG. CCXIII.

Car achevant la demi-circonference $AEDH$, & menant les paralleles EF, DG à AB; on aura en faisant BE ou $AF = x$, le rectangle $AF \times FH = ax - xx = \overline{FE}^2$ (bb) par la pro-

prieté du cercle. De même si l'on fait BD ou $AG = x$, on aura $AG \times GH = ax - xx = \overline{GD}^2$ (bb) : c'est à dire en l'un & l'autre cas $xx - ax + bb = o$. Si l'on veut que BE ou $AF = - x$, & BD ou $AG = - x$, on trouvera $AF \times FH$ & $AG \times GH = - xx - ax = \overline{FE}^2$ ou $\overline{GD}^2$ (bb) c'est à dire $xx + ax + bb = o$.

Si le cercle qui a pour centre le point C, & pour rayon la droite CA, ne coupe ni ne touche la parallele BD, (ce qui arrive toujours lorsque AB surpasse CA) ; les racines de l'égalité seront toutes deux imaginaires : mais s'il la touche en un point, les deux racines BE, BD, deviennent égales chacune au rayon CA.

REMARQUE.

381. LORSQUE dans une égalité l'inconnuë ne se rencontre qu'au quatriéme & au second degré, on peut toujours reduire cette égalité en une autre où l'inconnuë ne monte qu'au second degré : de maniere que ces sortes d'égalités ne passent que pour être du second degré.

FIG. CCXIV. Soit par exemple $z^4 - aazz - aabb = o$. Je suppose une inconnuë x qui soit telle que son rectangle par la donnée a soit égal au quarré zz ; ce qui donne $ax = zz$. Et mettant à la place de zz cette valeur ax, & à la place de z^4 son quarré $aaxx$, je change l'égalité donnée $z^4 - aazz - aabb = o$ en cette autre $xx - ax - bb = o$, où l'inconnuë x ne monte qu'au second degré. J'en cherche les racines x, comme l'on vient d'enseigner, & prenant des moyennes proportionnelles entre la donnée a & les valeurs de ses racines, je dis qu'elles exprimeront les valeurs cherches de l'inconnuë z : ce qui est évident, puisque $zz = ax$.

PROPOSITION III.

Problême.

383. *TROUVER par une autre voye les racines des égalités du second degré, sans qu'il soit necessaire de changer leur dernier terme en un quarré.*

FIG. CCXV. 1°. Soit $xx \mp ax - bc = o$. Ayant décrit un cercle quel-

conque ABD, dont le diametre ne ſoit pas moindre que les données a & $b - c$ (je ſuppoſe ici que b ſurpaſſe c) ; on inſcrira dans ce cercle, à commencer par un de ſes points quelconques A, deux cordes $AB = a$, $AD = b - c$: & ayant prolongé AD en F en ſorte que $DF = c$, on décrira de ſon centre C, & du rayon CF, un autre cercle concentrique qui coupe aux points F, E, G, H, les cordes AD, AB prolongées. Je dis que AG eſt la vraie racine, & AH la fauſſe de l'égalité $xx + ax - bc = o$; & qu'au contraire AG eſt la fauſſe, & AH eſt la vraie racine de $xx - ax - bc = o$.

Car AF ou $AD + DF = b$, DF ou $AE = c$, & faiſant AG ou $BH = x$, on aura $AH = a + x$. Or par la proprieté du cercle $EGFH$, le rectangle $EA \times AF$ (bc) $= GA \times AH$ ($xx + ax$). Si l'on fait à preſent $AH = - x$, on aura AG ou BH ou $AH - AB = - x - a$, & par conſequent $GA \times AH = xx + ax$ comme auparavant. Donc ſoit que l'on faſſe $AG = x$ ou $AH = - x$, on trouvera toujours $xx + ax - bc = o$. On prouvera de même que AG eſt la racine fauſſe, & AH la vraie de l'égalité $xx - ax - bc = o$.

2°. Soit $xx \mp ax + bc = o$. Ayant décrit un cercle quelconque ABD, dont le diametre ne ſoit pas moindre que les données a & $b + c$, on inſcrira dans ce cercle, à commencer par un de ſes points quelconques A, deux cordes $AB = a$, $AD = b + c$: & ayant pris ſur AD la partie $DF = c$, on décrira de ſon centre C & du rayon CF un autre cercle concentrique qui coupera les cordes AD, AB, aux points F, E, G, H. Je dis que AG & AH ſont les deux racines vraies de l'égalité $xx - ax + bc = o$, & les deux fauſſes de $xx + ax + bc = o$. Cela ſe demontre de même que dans le premier cas. FIG. CCXVI.

Si le cercle qui a pour rayon CF ne touchoit ni ne rencontroit la ligne AB en aucun point, il s'enſuivroit que les deux racines de l'égalité ſeroient imaginaires.

AVERTISSEMENT.

Tout l'artifice dont je me ſers pour conſtruire les égalités qui n'ont qu'une inconnuë, ou pour trouver les racines, conſiſte à introduire dans cette égalité une nouvelle inconnuë,

en forte qu'on en puiffe tirer plufieurs équations qui renferment chacune les deux inconnuës & qui foient telles que deux quelconques de ces équations renferment enfemble toutes les quantités connuës de la propofée; car autrement en faifant évanoüir l'inconnuë nouvellement introduite, on ne retrouveroit pas l'égalité propofée. Je choifis enfuite entre ces équations deux des plus fimples, & en ayant conftruit feparément les lieux, leurs points d'interfections me donnent les racines que je cherche. Il y a de l'art à introduire l'inconnuë; car il faut que les lieux que l'on tire de la propofée, foient les plus fimples qu'il fe puiffe: par exemple, fi l'égalité eft du quatriéme degré, il faut que les lieux des équations qu'on tire ne paffent point le fecond degré; que parmi ces lieux il y ait toujours un cercle comme étant le plus fimple, & auffi une Parabole, une Hyperbole équilatere &c. Or c'eft ce que j'ai tâché d'executer dans les Lemmes & les Propofitions qui fuivent.

LEMME FONDAMENTAL.

Pour la conftruction des Egalités du troifiéme & du quatriéme degré, par le moyen d'un cercle, & d'une Parabole donnée.

383. SOIT propofée l'égalité $x^4 + 2bx^3 + acxx - aadx - a^3f = 0$, dans laquelle x eft l'inconnuë, & a, b, c, d, f, font les données, & foit fuppofée une autre inconnuë y telle que fon rectangle par la connuë a, foit égal au rectangle de $x + b$ par x. Ce qui donne les équations fuivantes.

1°. $ay = xx + bx$, de laquelle quarrant chaque membre, on trouve $x^4 + 2bx^3 + bbxx = aayy$; & mettant à la place de $x^4 + 2bx^3$, fa valeur $aayy - bbxx$ dans l'égalité propofée x^4 &c. on la changera en cette feconde équation.

2°. $yy - \frac{bb}{aa}xx + \frac{c}{a}xx - dx - af = 0$, dans laquelle mettant à la place de xx fa valeur $ay - bx$ trouvée par le moyen de la premiere équation, 1°. Dans $-\frac{bb}{aa}xx$. 2°. Dans $\frac{c}{a}xx$. 3°. Dans $-\frac{bb}{aa}xx + \frac{c}{a}xx$, on arrivera à ces trois differentes équations.

3°. $yy - \frac{bb}{a}y + \frac{b^3}{aa}x + \frac{c}{a}xx - dx - af = 0.$

4°. $yy - \frac{bb}{aa}xx + cy - \frac{bc}{a}x - dx - af = 0.$

5°. $yy + cy - \frac{bb}{a}y - \frac{bc}{a}x + \frac{b^3}{aa}x - dx - af = 0$. Si

l'on

l'on retranche de cette cinquiéme équation, la premiere $xx + bx - ay = o$, & qu'enſuite on la lui ajoute, on aura ces deux autres.

6°. $yy + cy - \frac{bb}{a}y + ay - xx - bx - \frac{bc}{a}x + \frac{b^3}{aa}x - dx - af = o$.

7°. $yy + cy - \frac{bb}{a}y - ay + xx + bx - \frac{bc}{a}x + \frac{b^3}{aa}x - dx - af = o$.

Maintenant ſi l'on prend pour les inconnuës x & y deux lignes droites AP, PM, qui faſſent entr'elles un angle quelconque APM; il eſt évident que le lieu de la premiere équation eſt * une Parabole: que celui de la ſeconde peut être une Parabole, une Ellipſe, ou une Hyperbole ſelon que bb eſt égal, moindre, ou plus grand que ac; que celui de la troiſiéme eſt une Ellipſe, qui devient un cercle * lorſque $c = a$ & que l'angle APM eſt droit: que celui de la quatriéme eſt une Hyperbole, qui devient équilatere * lorſque $b = a$: que celui de la cinquiéme eſt encore une Parabole: que celui de la ſixiéme eſt une Hyperbole équilatere: & enfin que le lieu de la ſeptieme eſt un cercle, lorſque l'angle APM eſt droit.

* Art. 310.
* Art. 328. & 329.
* Art. 335. & 336.

REMARQUE I.

384. S'IL y avoit $- 2bx^3$ dans l'égalité propoſée au lieu de $+ 2bx^3$, il faudroit changer dans toutes les équations les ſignes des termes où b ſe rencontre avec une dimenſion impaire; & ſi le ſecond terme manquoit, il faudroit effacer tous les termes où b ſe trouve. Il en eſt de même à l'égard des autres termes de l'égalité propoſée par rapport aux lettres, c, d, f, qu'ils renferment. Mais l'on doit remarquer que dans tous les differens changemens qui peuvent arriver, le lieu de la premiere équation ſera une Parabole, celui de la ſixiéme une Hyperbole équilatere, & enfin celui de la derniere toujours un cercle lorſque l'angle APM eſt droit.

REMARQUE II.

385. ON a choiſi pour premiere équation $xx + bx = ay$, plûtôt que $xx - bx = ay$ ou ſimplement $xx = ay$; parce qu'en quarrant chaque membre de cette équation, les deux premiers termes du premier membre ſont les mêmes que les

deux premiers termes de l'égalite proposée $x^4 + 2bx^3$ &c., & qu'ainsi on peut les faire evanoüir tout d'un coup. Ce qui donne une nouvelle équation dont le lieu n'est que du second degré, & qui étant combinée en differentes façons avec la premiere, sert à en trouver (comme l'on vient de voir) plusieurs autres, dont les lieux n'étant que du second degré, se construisent aisément, parce qu'elles ne renferment point le plan xy; & entre lesquels le lieu de la derniere equation est toujours un cercle, en supposant que les inconnuës x & y fassent entr'elles un angle droit.

PROPOSITION IV.

Problême.

386. *TROUVER les racines de l'égalité proposée* $x^4 + 2bx^3 + acxx - aadx - a^3f = 0$, *par le moyen d'une Parabole & d'un cercle.*

FIG.CCXVII. Ayant pris pour les inconnuës & indéterminées x & y, les deux lignes droites AP, PM, qui fassent entr'elles un angle

* Art. 310. droit APM; je construis * d'abord la Parabole qui est le lieu de la premiere équation du Lemme, & ensuite le cercle qui est le lieu de la septiéme: & leurs intersections me servent à decouvrir les differentes valeurs de l'inconnuë x qui seront les racines de l'égalité proposée. Cela se fait en cette sorte.

Ayant pris sur la ligne AP prolongée de l'autre côté de A la partie $AD = \frac{1}{2}b$, on menera par le point D une parallele à PM, sur laquelle on prendra la partie $DC = \frac{bb}{4a}$ du côté opposé à PM; & on décrira de l'axe CD qui ait son origine en C, & dont le parametre soit égal à la donnée a, une Parabole MCM. Cela fait on menera par le point fixe A une parallele AQ à PM, sur laquelle ayant pris la partie $AB = \frac{1}{2}a + \frac{bb}{2a} - \frac{1}{2}c = \mp g$ pour abreger, on tirera parallelement à AP la droite $BE = \frac{1}{2}d \pm \frac{bg}{a}$ sçavoir $-\frac{bg}{a}$ lorsque $AB = +g$ c'est à dire lorsque la valeur de AB est positive, & $+\frac{bg}{a}$ lorsque $AB = -g$; en observant de prendre ou mener ces deux lignes AB, BE, du côté de PM lorsque leurs valeurs sont positives, & du côté opposé lorsqu'elles sont negatives. Nommant enfin EA, m; on décrira du centre E, & du rayon EM $\sqrt{mm + af}$ un cercle; & menant des points M où il coupe

la Parabole des perpendiculaires MP ſur la ligne AP: les parties AP de cette ligne marqueront les racines de l'égalité, ſçavoir les vraies lorſque les points P tombent du côté où l'on a ſuppoſé PM en faiſant la conſtruction, & les fauſſes lorſqu'ils tombent du côté oppoſé.

Car prolongeant MQ parallele à AP, & qui rencontre l'axe CG au point L, on aura ML ou $AP + AD = x + \frac{1}{2}b$, CL ou $MP + DC = y + \frac{bb}{4a}$; & par la proprieté de la Parabole $\overline{ML}^2 = CL \times a$, c'eſt à dire $xx + bx + \frac{1}{4}bb = \frac{1}{4}bb + ay$, ou $xx + bx = ay$ qui eſt la premiere équation du Lemme. Maintenant ſi l'on prolonge EB juſqu'à ce qu'elle rencontre PM en R, & qu'on tire le rayon EM, on aura à cauſe du triangle rectangle ERM le quarré $\overline{EM}^2 = \overline{ER}^2 + \overline{RM}^2 = \overline{EB}^2 + 2EB \times BR + \overline{BR}^2 + \overline{PM}^2 - 2AB \times PM + \overline{AB}^2 = \overline{EB}^2 + \overline{BA}^2 + af$ par la conſtruction; c'eſt à dire en effaçant de part & d'autre les quarrés $\overline{EB}^2$ $\overline{BA}^2$, & mettant pour $2AB$ ſa valeur $a + \frac{bb}{a} - c$, & pour $2BE$ ſa valeur $\frac{2bc}{a} - d$ ou $b + \frac{b^3}{aa} - d$, & pour BR ou AP & PM leurs valeurs x & y, la ſeptiéme équation $yy + cy - ay - \frac{bb}{a}y + xx + bx + \frac{b^3}{aa}x - \frac{bc}{a}x - dx = af$, dans laquelle ſi l'on met à la place de y ſa valeur $\frac{xx+bx}{a}$ trouvée par la premiere équation, & à la place de yy le quarré de cette valeur, on retrouve l'équation même propoſée $x^4 + 2bx^3 + acxx - aadx - a^3f = 0$. D'où l'on voit que la ligne AP exprime une racine vraie de cette égalité.

Si l'on obſerve de prendre $-x$ pour AP & $-y$ pour PM, lorſque ces lignes tombent du côté oppoſé où on les a ſuppoſées en faiſant la conſtruction; on trouvera toujours par la proprieté de la Parabole la premiere équation, & par la proprieté du cercle la ſeptiéme. Donc &c.

COROLLAIRE I.

387. Il est visible qu'on rendra la construction precedente generale pour toutes les égalités du troisieme & du quatrieme degré, & qu'on y employera toûjours une Parabole qui ait pour le parametre de son axe une ligne donnée a ; si l'on observe 1°. De multiplier par sa racine x l'égalité lorsqu'elle n'est que du troisieme degré ; & de prendre une ligne * $2b$ égale à toutes celles qui multiplient x^3, un plan * ac égal à ceux qui multiplient xx, un solide aad égal aux solides qui multiplient x , & enfin un sursolide a^3f égal aux termes entierement connus de l'égalité donnée . 2°. De changer dans les valeurs des lignes AD , DC , AB , BE , EM , qui déterminent la construction de la Parabole & du cercle , les signes des termes où b se rencontre avec une dimension impaire s'il y a $-2bx^3$ dans l'égalité donnée , parce qu'il y avoit $+2bx^3$ dans celle du Problême ; & d'effacer tous les termes où b se trouve si le terme $2bx^3$ manque, parce qu'alors $b = o$: comme aussi de faire la même chose à l'égard des termes ou c, d, f, se rencontrent. 3°. De prendre ou mener ces lignes du côté de PM lorsqu'elles sont positives, & du côté opposé lorsqu'elles sont negatives. On aura donc $AD = +\frac{1}{2}b$, sçavoir $-\frac{1}{2}b$ lorsqu'il y a $+2bx^3$, & $+\frac{1}{2}b$ lorsqu'il y a $-2bx^3$; $AB = \frac{1}{2}a + \frac{bb}{2a} \mp \frac{1}{2}c = \mp g$, sçavoir $-\frac{1}{2}c$ lorsqu'il y a $+acxx$, & $+\frac{1}{2}c$ lorsque c'est $-acxx$; $BE = \mp\frac{bg}{a} \mp \frac{1}{2}d$, sçavoir $-\frac{bg}{a}$ lorsque $AB = +g$, & qu'il y a $+2bx^3$, ou bien lorsque $AB = -g$, & qu'il y a $-2bx^3$; & au contraire $+\frac{bg}{a}$ lorsque $AB = +g$ & qu'il y a $-2bx^3$, ou bien lorsque $AB = -g$ & qu'il y a $+2bx^3$ (c'est à dire $-\frac{bg}{a}$ lorsque les valeurs de AB & AD sont l'une positive & l'autre negative, & $+\frac{bg}{a}$ lorsque ces valeurs sont toutes deux ou positives ou negatives); comme aussi $+\frac{1}{2}d$ lorsqu'il y a $-aadx$, & $-\frac{1}{2}d$ lorsque c'est $+aadx$: & enfin $EM = \sqrt{mm + af}$ sçavoir $+af$ lorsqu'il y a $-a^3f$, & $-af$ lorsque c'est $+a^3f$. D'où l'on tire cette construction geometrique qui est generale pour tous les cas.

* Art. 376.
* Art. 377.

FIG. CCXVII. Une Parabole MCM qui a pour axe la ligne CG dont le

parametre eſt égal à la ligne a, étant donnée, & ayant reduit l'égalité propoſée ſous cette forme $x^4 \mp 2bx^3 \mp acxx \mp aadx \mp a^3f = 0$; on menera une ligne AB parallele à l'axe CG qui en ſoit diſtante de $\frac{1}{2}b$, du côté droit de cet axe lorſqu'il y a $+ 2bx^3$ dans l'égalité donnée, & du côté gauche lorſqu'il y a $- 2bx^3$. On tirera par le point A où la ligne AB rencontre la Parabole, une perpendiculaire AD ſur l'axe CG; & on prendra ſur cet axe les parties $DF = \frac{1}{2}a$, $FG = 2CD$ toujours du côté oppoſé à ſon origine C, & la partie $GK = \frac{1}{2}c$ vers ſon origine C lorſqu'il y a $+ acxx$, & du côté oppoſé lorſqu'il y a $- acxx$. On menera enſuite par les points déterminés A, F, une ligne droite indéfinie AF, & par le point K une perpendiculaire à l'axe qui rencontre AF en H; & on prendra ſur cette perpendiculaire la partie $HE = \frac{1}{2}d$ du côté droit lorſqu'il y a $- aadx$, & du côté gauche lorſqu'il y a $+ aadx$. Cela fait, on décrira un cercle du centre E, & du rayon $EM = AE$, lorſque le terme a^3f manque dans l'égalité donnée, c'eſt à dire, lorſqu'elle n'eſt que du troiſiéme degré: mais lorſqu'elle eſt du quatriéme, on prendra (après avoir nommé AE, m;) le rayon $EM = \sqrt{mm \mp af}$, ſçavoir $+ af$ s'il y a $- a^3f$, & $- af$ s'il y a $+ a^3f$. Enfin des points M où ce cercle rencontre la Parabole donnée, menant des perpendiculaires MQ ſur la ligne AB; elles feront les racines de l'égalité donnée; ſçavoir celles qui tombent du côté droit de cette ligne, les vraies, & celles qui tombent du côté gauche, les fauſſes.

Car prolongeant HK juſqu'à ce qu'elle rencontre la ligne AB au point B, on a par la conſtruction BK ou $AD = \mp \frac{1}{2}b$, ſçavoir $- \frac{1}{2}b$ lorſqu'il y a $+ 2bx^3$, & $+ \frac{1}{2}b$ lorſque c'eſt $- 2bx^3$; & par la proprieté de la Parabole, $CD = \frac{bb}{4a}$. Donc DG ou $DF + FG = \frac{1}{2}a + \frac{bb}{2a}$, & DK ou $AB = \frac{1}{2}a + \frac{bb}{2a} \pm \frac{1}{2}c = \mp g$, ſçavoir $- \frac{1}{2}c$ lorſqu'il y a $+ acxx$, & $+ \frac{1}{2}c$ lorſqu'il y a $- acxx$; & l'on doit obſerver que le point B tombe du côté de PM lorſque $AA = + g$, c'eſt à dire lorſque ſa valeur eſt poſitive, & du côté oppoſé lorſqu'elle eſt negative. Or à cauſe des triangles ſemblables ADF, ABH, on aura DF ($\frac{1}{2}a$). DA ($\pm \frac{1}{2}b$) :: AB ($\mp g$). $BH = \pm \frac{bg}{a}$, ſçavoir $+ \frac{bg}{a}$ lorſque les valeurs

valeurs de AD & de AB font toutes deux positives ou negatives, & $-\frac{bc}{a}$ lorsque l'une d'elles est positive & l'autre negative. Et partant $BE = +\frac{bc}{a} + \frac{1}{2}d$, sçavoir $-\frac{1}{2}d$ lorsqu'il y a $-aadx$, & $+\frac{1}{2}d$ lorsqu'il y a $+aadx$; & l'on doit encore observer que le point E tombera du côté de PM lorsque la valeur de BE est positive, & du côté opposé lorsqu'elle est negative. D'où il est évident que par le moyen de cette construction on déterminera dans tous les cas possibles, toûjours comme il est requis, le centre E du cercle.

Si le second terme $2bx^3$ manquoit dans l'égalité donnée, il est clair que les lignes AB, AF, tomberoient sur l'axe CG, ensorte que les points A, D, se confondroient avec l'origine C; puisque $b = 0$. Et par consequent le point G tomberoit sur le point F, & les points H, B; sur le point K: ce qui rend la construction generale beaucoup plus simple. Car il ne faudroit alors que prendre sur l'axe la partie $CF = \frac{1}{2}a$ toûjours vers le dedans de la Parabole, & la partie $KF = \frac{1}{2}c$ vers l'origine C lorsqu'il y a $+acxx$, & du côté opposé lorsqu'il y a $-acxx$; mener $KE = \frac{1}{2}d$ perpendiculaire à l'axe, du côté gauche lorsqu'il y a $+aadx$; & du côté droit lorsqu'il y a $-aadx$; & achever le reste comme dans la construction generale, en observant qu'ici $EC = m$.

FIG. CCXVIII.

FIG. CCXVII. De même si le terme $acxx$ manque, le point K tombera sur le point G; & si c'est le terme $aadx$, le centre E du cercle tombera en H.

COROLLAIRE II.

388. On peut encore trouver une construction plus simple pour les égalités du troisiéme degré qui ont un second terme, en les multipliant par l'inconnuë plus ou moins la quantité connuë du second terme, sçavoir plus cette quantité quand le second terme est affecté du signe $-$; & moins cette quantité lorsqu'il y a le signe $+$; ce qui donne une équation du quatriéme degré où le second terme est évanoüi. Qu'il faille, par exemple, trouver les racines de l'égalité du troisiéme degré, $x^3 - bxx + apx$

$+ aaq = o$: je la multiplie par $x + b$ pour avoir l'égalité du quatriéme degré , $\begin{matrix} x^4 + apxx + aaqx + aabq = o, \\ - bbxx + abpx \end{matrix}$ dans laquelle le ſecond terme eſt évanoüi ; je me ſers à preſent de la conſtruction que l'on vient de donner pour ces ſortes d'égalités où le ſecond terme manque, & j'ai CK $(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c) = \frac{1}{2}a + \frac{bb}{2a} - \frac{1}{2}p$, KE $(\frac{1}{2}d) = \frac{1}{2}q + \frac{bp}{2a}$, & le rayon du cercle $EM = \sqrt{mm - bq}$: ce qui donne cette conſtruction.

Ayant mené une parallele à l'axe CD qui en ſoit diſtante vers le côté gauche d'une ligne égale à b, & qui rencontre la Parabole au point A, je tire par l'origine C de l'axe la droite CA, ſur laquelle j'éleve par ſon point de milieu O une perpendiculaire indéfinie OG qui rencontre l'axe au point G. Je prends ſur l'axe vers ſon origine C la partie $GK = \frac{1}{2}p$, & ayant tiré par le point K une perpendiculaire à l'axe qui rencontre la ligne OG au point H, je prends ſur cette perpendiculaire prolongée du côté de H la partie $HE = \frac{1}{2}q$, & je décris du centre E & du rayon EA un cercle. Je dis qu'il coupera la Parabole en des points M, d'où ayant abaiſſé ſur l'axe des perpendiculaires MQ ; celles qui ſeront à droit, marqueront les vraies racines ; & celles qui ſeront à gauche, les fauſſes de l'égalité propoſée $x^3 - bxx + apx + aaq = o$. FIG. CCXIX.

Car ayant mené les perpendiculaires AD, OL, ſur l'axe ; on aura par la conſtruction $AD = b$, & par la proprieté de la Parabole $CD = \frac{bb}{a}$. Donc puiſque CA eſt diviſée par le milieu en O, les triangles ſemblables CAD, COL, donneront $OL = \frac{1}{2}b$, $CL = \frac{bb}{2a}$; & à cauſe des triangles rectangles ſemblables CLO, OLG, on aura CL $(\frac{bb}{2a})$. LO $(\frac{1}{2}b)$ :: LO $(\frac{1}{2}b)$. $LG = \frac{1}{2}a$, & par conſequent CK ou $CL + LG - GK = \frac{1}{2}a + \frac{bb}{2a} - \frac{1}{2}p$. De plus à cauſe des triangles ſemblables GLO, GKH, on trouve $KH = \frac{bp}{2a}$, & $KH + HE$ ou $KE = \frac{1}{2}q + \frac{bp}{2a}$ qui tend du côté gauche de l'axe, comme il eſt preſcrit dans la conſtruction lorſqu'il y a $+ aadx$. Le point E eſt donc le centre du cercle lequel doit déterminer par ſes interſections avec la Parabole donnée toutes les racines de l'égalité du quatriéme degré $x^4 + apxx$ &c. Or comme les racines de cette

égalité sont celles de la proposée $x^3 - bxx + apx + aaq = o$, avec une fausse AD (b); il s'ensuit que ce cercle doit passer par le point A. Donc &c.

On peut encore s'assurer par le calcul que EA est le rayon du cercle cherché. Car menant EB parallele à l'axe, on aura (à cause des triangles rectangles EBA, EKC) les quarrés des hypothenuses $\overline{EA}^2 = \overline{EB}^2 + \overline{BA}^2$ & $\overline{EC}^2 = \overline{CK}^2 + \overline{KE}^2$ & par consequent il s'agit de prouver que $\overline{EB}^2 + \overline{BA}^2 = \overline{EK}^2 + \overline{KC}^2 - bq$, puisqu'on doit prendre $EM = \sqrt{mm - bq}$. Or en mettant à la place de ces lignes de part & d'autre leurs valeurs analytiques, on trouvera les mêmes quantités. Et c'est ce qui doit arriver, si le rayon cherché $EM = EA$.

Pour rendre cette construction generale, il faut observer 1°. De mener du côté gauche de l'axe la parallele qui en est distante d'une ligne égale à b, lorsqu'il y a $- bxx$. dans l'égalité proposée, & du côté droit lorsqu'il y a $+ bxx$. 2°. De prendre sur l'axe $GK = \frac{1}{2} p$ du côté de son origine C lorsqu'il y a $+ apx$, & du côté opposé lorsqu'il y a $- apx$. 3°. De prendre $HE = \frac{1}{2} q$ du côté gauche lorsqu'il y a $+ aaq$, & du côté droit lorsqu'il y a $- aaq$. Tout cela est trop évident pour m'arrêter à le demontrer en détail.

REMARQUE I.

389. IL est à propos de remarquer, 1°. Que si le cercle ne coupe la Parabole donnée qu'en deux points, il s'ensuivra que l'egalité proposée n'aura que deux racines réelles lorsqu'elle est du quatriéme degré, & qu'une seule lorsqu'elle est du troisiéme, & les deux autres imaginaires : comme dans la figure 219. où le cercle ne coupe la Parabole qu'en deux points A, M; l'égalité $x^4 + apxxx - bbxx$ &c. n'a que deux racines réelles AD, MQ, qui sont toutes deux fausses, parce qu'elles tombent du côté gauche de l'axe. 2°. Que si le cercle ne coupoit ni ne recontroit la Parabole en aucun point (ce qui ne peut arriver lorsque l'égalité est du troisiéme degré comme l'on voit par les constructions precedentes) les quatre racines seroient imaginaires. 3°. Que s'il la touchoit en un point l'égalité proposée auroit deux racines égales chacune à la perpendiculaire menée de ce point; ce qui vient de ce qu'on peut considerer un cercle

qui

qui touche une Parabole, comme s'il coupoit en deux points infiniment proches l'un de l'autre, qui sont regardés comme réunis dans le point touchant : mais alors l'egalité proposée se pourroit abaisser à une du second degré par les regles de l'Algebre ordinaire, de sorte qu'on n'auroit point besoin d'une Parabole pour en trouver les racines.

REMARQUE II.

390. Si l'on fait attention à ce qu'on démontre en Algebre qu'en toute égalité où le second terme manque, & qui a toutes ses racines réelles, la somme des vraies est égale à la somme des fausses; on verra naître ce Theorême.

S'il y a un cercle qui coupe une Parabole en quatre points FIG.CCXVIII. M d'où l'on abaisse des perpendiculaires MQ sur l'axe CF: je dis que la somme des perpendiculaires qui tombent du côté droit de l'axe, sera égale à la somme de celles qui tombent du côté gauche.

Car si l'on prend vers le dedans de la Parabole sur l'axe depuis son origine C la partie CF égale à la moitié de son parametre que j'appelle a, & qu'ayant tiré du centre E du cercle la perpendiculaire EK sur l'axe, on fasse $FK = \frac{1}{2}c$, $KE = \frac{1}{2}d$, $\overline{EC}^2 - \overline{EM}^2 = af$; il est clair par la construction qui est à la fin * du Corollaire premier, que les perpendiculaires MQ * Art. 387. seront les racines de cette égalité $x^4 - acxx + aadx + a^3f = 0$ dans laquelle le second terme manque; sçavoir celles qui tombent du côté droit de l'axe, les vraies; & celles qui tombent du côté gauche, les fausses. Donc &c.

Si le cercle passoit par l'origine C de l'axe, il est visible que l'une des perpendiculaires MQ deviendroit nulle ou zero; & qu'ainsi il y auroit alors une perpendiculaire d'une part de l'axe égale aux deux autres de l'autre part.

Si le cercle touchoit la Parabole en un point & la coupoit en deux autres, il faudroit prendre le double de la perpendiculaire menée du point touchant; puisque (comme l'on vient * de dire) on peut regarder ce cercle comme s'il coupoit la Parabole en deux points infiniment proches l'un de l'autre, lesquels se reüinissent au point touchant. * Art. 389.

REMARQUE III.

391. Comme l'on ne peut imaginer en Geometrie des produits qui ayent plus de trois dimensions ; puisque le solide, qui est la quantité la plus composée, n'en a que trois ; on pourra diviser, si l'on veut, tous les termes d'une égalité proposée qui passe le troisiéme degré, par telle ligne donnée qu'on voudra, élevée à une puissance moindre d'une unité que chacun de ses termes n'a de dimensions : ce qui ne troublera point l'égalité, & fera que chacun de ses termes, n'exprimera plus que des lignes droites. Soit, par exemple, l'égalité du quatriéme degré $x^4 + 2b^3 + acxx - aadx - a^3f = o$; je la divise par a^3, ce qui donne $\frac{x^4}{a^3} + \frac{2bx^3}{a^3} + \frac{cxx}{aa} - \frac{dx}{a} - f = o$, dont chaque terme n'a qu'une dimension, & n'exprime par consequent que des lignes droites. On choisit ordinairement la ligne qui se trouve repetée le plus souvent dans tous les termes de l'équation proposée, comme est ici la ligne a, & même quelquefois on la sousentend, en la regardant comme l'unité dans les nombres, qui ne change rien aux quantités qu'elle multiplie ou qu'elle divise : ainsi en faisant $a = 1$, on écrira $x^4 + 2bx^3 + cxx - dx - f = o$, au lieu de $x^4 + 2bx^3 + acxx - aadx - a^3f = o$ ou de $\frac{x^4}{a^3} + \frac{2bx^3}{a^3} + \frac{cxx}{aa} - \frac{dx}{a} - f = o$. Il en est de même des égalités du cinquiéme & du sixiéme degré, &c.

REMARQUE IV.

392. Si après avoir construit le cercle qui est le lieu de la derniere équation du Lemme, on construit une Section conique qui soit le lieu de telle autre de ses équations qu'on voudra ; ces deux lieux détermineront par leurs intersections les racines de l'égalité proposée; dont la raison est que faisant évanoüir par le moyen de leurs équations l'inconnuë y, on retrouve l'égalité même proposée.

De là il est evident qu'on peut construire cette égalité, 1°. Par le moyen d'un cercle & d'une Hyperbole équilatere, en se servant de la septiéme & de la sixiéme équation du Lemme. 2°. Par le moyen d'un cercle, & d'une Ellipse dont l'axe parallele à AP est à son parametre comme a est à c, en se servant de la septiéme & de la troisiéme équation. 3°. Par

le moyen d'un cercle, & d'une Hyperbole dont l'axe parallele à AP eſt à ſon parametre comme aa eſt à bb, en ſe ſervant de la ſeptiéme & de la quatriéme équation. Or comme la ligne a, dont on ſe ſert pour reduire ſous l'expreſſion ac toutes les quantités qui multiplient xx, ſous l'expreſſion aad celles qui multiplient x, & enfin ſous l'expreſſion a^3f les quantités entierement connuës, eſt arbitraire; il s'enſuit qu'en prenant pour cette ligne a une infinité de differentes grandeurs, on pourra conſtruire l'égalité propoſée par le moyen d'une infinité de cercles, & d'Ellipſes; ou d'Hyperboles équilateres & non équilateres, toutes differentes entr'elles.

On a vû dans l'article 387. qu'en prenant pour l'unité arbitraire a le parametre de l'axe d'une Parabole donnée, on peut en ſe ſervant de la premiere & de la ſeptiéme équation conſtruire l'égalité propoſée par le moyen d'un cercle & de la Parabole donnée: & je vais faire voir qu'en déterminant cette ligne a d'une certaine maniere, on peut conſtruire l'égalité par le moyen d'un cercle & d'une Ellipſe ou d'une Hyperbole ſemblable à une Ellipſe ou à une Hyperbole donnée. Car la raiſon de ſes axes étant donnée par la ſuppoſition, la raiſon de l'axe parallele à AP avec ſon parametre ſera auſſi donnée. Si donc l'on nomme cette raiſon donnée $\frac{n}{m}$; on aura lorſqu'il s'agit de l'Ellipſe $\frac{c}{a} = \frac{n}{m}$, & partant $aa = \frac{acm}{n}$; d'où il ſuit que ſi l'on prend pour l'unité arbitraire a, la racine d'un quarré aa égal * à une quantité connuë ac qui multiplie * Art. 378.
xx dans l'égalité donnée, & eſt multipliée par $\frac{m}{n}$, on conſtruira l'égalité en ſe ſervant de la ſeptiéme & de la troiſiéme équation, par le moyen d'un cercle & d'une Ellipſe dont l'axe parallele à AP, ſera à ſon parametre comme m eſt à n, puiſque $\frac{n}{m} = \frac{c}{a}$. Mais lorſqu'il s'agit de l'Hyperbole, on aura $\frac{n}{m} = \frac{bb}{aa}$, & partant $a = b\sqrt{\frac{m}{n}}$; d'où l'on voit que ſi l'on prend pour l'unité a cette valeur, & qu'on conſtruiſe l'égalité en ſe ſervant de la ſeptiéme & de la quatriéme équation, l'axe parallele à AP de l'Hyperbole qui eſt le lieu de la quatrieme, ſera à ſon parametre comme m eſt à n, puiſque $\frac{n}{m} = \frac{bb}{aa}$. Et c'eſt ce qui étoit propoſé.

REMARQUE V.

393. La ligne a qui fait l'office de l'unité, & qui eſt arbitraire, ſuffit comme l'on vient de voir pour conſtruire l'égalité propoſée, par le moyen d'un cercle & d'une Parabole donnée, ou bien par le moyen d'un cercle, & d'une Ellipſe, ou d'une Hyperbole ſemblable à une donnée. Mais lorſqu'il eſt queſtion de la conſtruire par le moyen d'un cercle, & d'une Ellipſe, ou d'une Hyperbole donnée, une ſeule ligne arbitraire ne ſuffit pas; il faut en introduire d'autres dans l'égalité propoſée, afin de pouvoir les déterminer enſuite de la maniere que la Section donnée ſerve. C'eſt ce que l'on va executer dans le Lemme ſuivant.

LEMME FONDAMENTAL.

Pour la conſtruction des Egalités du troiſiéme & du quatriéme degré, avec un cercle, & une Ellipſe, ou une Hyperbole donnée.

394. Soit l'égalité du quatriéme degré $z^4 + abzz - aacz + a^3d = o$, dans laquelle les lettres a, b, c, d, marquent des lignes données, & la lettre z exprime les racines inconnuës de l'égalité. Je prends une autre inconnuë $x = \frac{fz}{a}$ (la lettre f marque une ligne priſe à volonté), & ſubſtituant à la place de z, zz, & z^4 leurs valeurs $\frac{ax}{f}$, $\frac{aaxx}{ff}$, & $\frac{a^4x^4}{f^4}$ dans l'égalité precedente, je la change en cette autre $x^4 + \frac{bff}{a}xx - \frac{cf^3}{a}x + \frac{df^4}{a} = o$; je prends une troiſiéme inconnuë y telle qu'étant multipliée par f ſon produit fy ſoit égal au quarré xx de la ſeconde; ce qui donne les équations ſuivantes.

1°. $xx - fy = o$; & ſubſtituant à la place de xx, & de x^4 leurs valeurs fy & $ffyy$ dans l'égalité $x^4 + \frac{bff}{a}xx$ &c, j'ai pour ſeconde équation.

2°. $yy + \frac{bf}{a}y - \frac{cf}{a}x + \frac{dff}{a} = o$, laquelle étant ajoutée à la premiere, donne pour troiſiéme équation.

* Art. 324. & 329. 3°. $yy + \frac{bf}{a}y - fy + xx - \frac{cf}{a}x + \frac{dff}{a} = o$, dont le lieu eſt * un cercle lorſque les inconnuës & indétermi-

nées x & y font entr'elles un angle droit. Je multiplie la premiere équation par la fraction $\frac{g}{a}$ dans laquelle g exprime une ligne telle qu'on veut de même que f, & j'ai $\frac{g}{a}xx - \frac{fg}{a}y = 0$; & ajoutant cette équation avec la seconde, & l'en ôtant ensuite, je forme la quatriéme & la cinquiéme équation.

4°. $yy + \frac{bf}{a}y - \frac{gf}{a}y + \frac{g}{a}xx - \frac{cf}{a}x + \frac{dff}{a} = 0$, dont le lieu est * une Ellipse. * *Art.* 324.

5°. $yy + \frac{bf}{a}y + \frac{gf}{a}y - \frac{g}{a}xx - \frac{cf}{a}x + \frac{dff}{a} = 0$, dont le lieu est * une Hyperbole ou les Hyperboles opposées. * *Art.* 332.

REMARQUE.

395. S'IL arrive que quelques termes de l'égalité proposée ayent des signes differens de celle ci, ou qu'ils manquent; les lieux de ces cinq équations seront toujours neanmoins des Sections coniques de même nom: c'est à dire que les lieux de la premiere & de la seconde équation seront toujours des Paraboles, celui de la troisiéme, un cercle, &c.

PROPOSITION V.

Problême.

396. *CONSTRUIRE l'égalité du quatriéme degré* $z^4 + abzz - aacz + a^3d = 0$, *avec un cercle donné & une Hyperbole semblable à une donnée; ou avec une Hyperbole donnée & un cercle.*

Je construis separément * les lieux de la troisiéme & de la cinquiéme équation, en prenant pour les inconnuës & indéterminées x & y les mêmes lignes AP, PM, qui fassent entr'elles un angle droit APM; & les intersections de ces deux lieux me servent à déterminer les valeurs de l'inconnuë z, de la maniere qui suit. * *Art.* 324. & 332. FIG. CCXX. & CCXXI.

Soit menée par le point A origine des x, la ligne $AD = \frac{af-bf}{2a}$ parallele à PM, & du même côté lorsque a surpasse b, & au contraire du côté opposé lorsqu'il est moindre. Et ayant tiré la droite indéfinie DG parallele à AP, soient prises sur cette ligne du côté de PM la partie $DC = \frac{cf}{2a}$, & soit décrit du centre C & du rayon CF ou

$CG = \frac{f}{2a}\sqrt{cc + aa - 2ab + bb - 4ad}$, un cercle. Maintenant ayant mené $AH = \frac{bf + cf}{2a}$ parallele à PM & du côté opposé, soit tirée la droite indéfinie HK parallele à AP, sur laquelle soient prises la partie $HI = \frac{cf}{2g}$ du côté opposé à PM, & de part & d'autre du point I les parties IK, IL, égales chacune à $\frac{f}{2g}\sqrt{cc - bg + 4dg}$ ou $\frac{f}{2g}\sqrt{bg - 4ag - cc}$ (on a pris pour abreger $h = \frac{\overline{b+g}^2}{a}$). Soit enfin décrite de l'axe LK (qui doit être le premier lorsque $cc + 4dg$ est plus grand que bg, & le second lorsqu'il est moindre) qui soit à son parametre KO comme a est à g, une Hyperbole ou les Hyperboles opposées qui rencontrent le cercle en des points M, M, d'où soient abaissées des perpendiculaires MP, MP, sur la ligne AP. Je dis que les parties AP, AP, de cette ligne seront les racines de l'égalité $x^4 + \frac{bff}{a}xx - \frac{ef^3}{a}x + \frac{df^4}{a} = 0$; en observant qu'elles sont vraies lorsque les points P tombent du côté où l'on a supposé PM en faisant la construction, & fausses lorsqu'ils tombent du côté opposé.

Car on trouvera par la proprieté du cercle la troisiéme équation ; & par la proprieté de l'Hyperbole, la cinquiéme ; & ôtant la troisiéme de la cinquiéme, on aura $\frac{gf}{a}y + fy - \frac{g}{a}xx - xx = 0$, d'où l'on tire $y = \frac{xx}{f}$; & mettant dans l'une ou dans l'autre de ces deux équations à la place de y cette valeur $\frac{xx}{f}$, & à la place de yy son quarré $\frac{x^4}{ff}$, on trouvera l'égalité x^4 &c. Mais ayant les valeurs de x, on a celles de z ; puisque $z = \frac{ax}{f}$.

Maintenant pour satisfaire à la premiere demande du Problême, je nomme le rayon du cercle donné CF, r ; & j'ai par consequent $r = \frac{f}{2a}\sqrt{cc + aa - 2ab + bb - 4ad}$; d'où il suit que si l'on prend $f = \frac{2ar}{\sqrt{cc + aa - 2ab + bb - 4ad}}$, le rayon CF ou CG du cercle qui est le lieu de la troisiéme équation, sera égal à la donnée r. Il reste à faire que l'Hyperbole soit semblable à une donnée, c'est à dire, que son premier ou second axe LK soit à son parametre KO en raison donnée de m à n ; & il est visible qu'il ne faut pour cela que prendre $g = \frac{an}{m}$, puisque $LK \,.\, KO :: a \,.\, g :: m \,.\, n$.

Enfin pour faire en sorte que l'Hyperbole soit donnée,

ou, ce qui eſt la même choſe que ſon premier ou ſecond axe LK & le parametre KO de cet axe ſoient égaux à des lignes données ; je nomme d'abord le premier axe LK, $2t$; ſon parametre KO, p; & j'ai $KO\ (p) = \frac{2gt}{a}$, & $LK\ (2t) = \frac{f}{g}\sqrt{cc + 4dg - bg}$ (il faut ſe reſſouvenir que $b = \frac{\overline{b+g}^2}{a}$); ce qui donne $g = \frac{ap}{2t}$, & $f = \frac{2gt}{\sqrt{cc + 4dg - bg}}$: d'où l'on voit que ſi $cc + 4dg$ ſurpaſſe bg, & qu'on prenne pour g & pour f ces valeurs, on trouvera dans la conſtruction de la cinquiéme équation pour le premier axe LK & ſon parametre KO les lignes données $2t$ & p. Mais s'il arrive que $cc + 4dg$ ſoit moindre que bg, il faudra nommer le ſecond axe LK, $2t$; & ſon parametre KO, p; ce qui donne comme ci-deſſus $g = \frac{ap}{2t}$, & $f = \frac{2gt}{\sqrt{bg - cc - 4dg}}$; où l'on doit obſerver que $2t$ & p ne marquent plus à preſent les mêmes lignes qu'auparavant : & s'il arrive que bg, dans cette derniere ſuppoſition où $2t$ marque le ſecond axe ; ſurpaſſe $cc + 4dg$, il eſt viſible qu'en prenant pour g & f ces valeurs dans la conſtruction de la cinquiéme équation, on trouvera pour le ſecond axe LK & ſon parametre KO les lignes données $2t$ & p.

Il faut bien remarquer qu'il peut arriver que la valeur de f ſoit imaginaire dans l'une & dans l'autre de ces ſuppoſitions ; & alors on voit que la conſtruction devient impoſſible du moins par cette methode. Or comme tous les Auteurs qui s'en ſont ſervis après M. Sluze, qui en eſt l'inventeur, la donnent pour generale ; j'en ferai une remarque à part, où je ferai voir en examinant par ordre tous les cas qui peuvent arriver, que dans cet exemple même il peut y en avoir une infinité où cette methode ne réüſſit point.

Si c'étoient deux Hyperboles conjuguées qui fuſſent données, la conſtruction ſeroit toujours poſſible ; car ſi après avoir nommé le premier axe d'une de ces Hyperboles LK, $2t$; & ſon parametre KO, p; il ſe trouvoit que la valeur de $f = \frac{2gt}{\sqrt{cc + 4dg - bg}}$ fût imaginaire, c'eſt à dire, que bg ſurpaſſât $cc + 4dg$; il n'y auroit qu'à ſe ſervir dans la conſtruction à la place de cette Hyperbole de ſa conjuguée & de ſon ſecond axe, puiſque le ſecond axe de celle-ci étant

le même que le premier axe de l'autre la valeur de f ne renfermeroit plus aucune contradiction. Je dois encore avertir que s'il arrive que $cc + 4dg = bg$, l'équation du quatriéme degré s'abaisse à une du second.

REMARQUE.

397. 1°. Si l'Hyperbole donnée est équilatere. On aura $g = a$, & on se servira dans la construction du Problême de son premier axe, lorsque $cc + 4dg$ surpasse bg, c'est à dire, en mettant pour b sa valeur $\frac{\overline{b+g}^2}{a}$, & pour g sa valeur a, lorsque $cc + 4ad$ surpasse $\overline{b+a}^2$; & du second lorsqu'il est moindre. Et la construction sera toujours possible.

2°. Si le premier axe de l'Hyperbole donnée surpasse son parametre. On se servira dans la construction du Problême de son premier axe, lorsque $cc + 4ad$ surpasse $\overline{b+a}^2$; car il suit de-là que $cc + 4dg$ surpasse bg, c'est à dire (en multipliant par $\frac{a}{g}$ & mettant pour b sa valeur $\frac{\overline{b+g}^2}{a}$) que $\frac{acc}{g} + 4ad$ surpasse $\overline{b+g}^2$, puisque dans cette supposition g ($\frac{ap}{2t}$) étant moindre que a, la quantité $\frac{acc}{g} + 4ad$ sera plus grande que $cc + 4ad$, & $\overline{b+g}^2$ sera moindre que $\overline{b+a}^2$. Au contraire lorsque $cc + 4ad$ est moindre que $\overline{b+a}^2$, il faudra se servir du second axe; car il suit de-là que $cc + 4dg$ est moindre que bg, ou que $\frac{acc}{g} + 4ad$ est moindre que que $\overline{b+g}^2$ puisque $2t$ marquant à present le second axe qui est moindre que son parametre p la quantité $\frac{ap}{2t}$ est ici plus grande que a. D'où l'on voit que la construction est toujours possible, non seulement lorsque l'Hyperbole donnée est équilatere, mais encore lorsque le premier axe est plus grand que son parametre.

3°. Si le premier axe est moindre que son parametre. Il faudra necessairement lorsque $cc + 4ad$ surpasse $\overline{b+a}^2$, se servir du premier axe; car si l'on employoit le second, il faudroit que $cc + 4dg$ fût moindre que bg, ou que $\frac{acc}{g} + 4ad$ fût moindre que $\overline{b+g}^2$; ce qui ne peut être, puisque $2t$

qui

qui exprimeroit alors le ſecond axe étant plus grand que p, la quantité g ($\frac{ap}{2r}$) ſeroit moindre que a. Mais en ſe ſervant du premier axe, il peut arriver que $\frac{acc}{g} + 4ad$ ſoit moindre que $\overline{b + g}^2$ puiſque g ($\frac{ap}{2r}$) eſt plus grand que a; & alors il eſt évident que la conſtruction du Problême devient impoſſible, parce que la valeur de f ($\frac{2gr}{\sqrt{cc + 4dg - bg}}$) renferme une contradiction. De même lorſque $cc + 4ad$ eſt moindre que $\overline{b + a}^2$, il faut neceſſairement ſe ſervir du ſecond axe; & comme alors la valeur de g ($\frac{ap}{2r}$) eſt moindre que a, il peut arriver que $\frac{acc}{g} + 4ad$ ſoit plus grand que $\overline{b + g}^2$, & qu'ainſi la valeur de f ($\frac{2gr}{\sqrt{bg - cc - 4dg}}$) ſoit imaginaire.

Il eſt donc évident qu'il peut arriver une infinité de cas, où la conſtruction de l'égalité propoſée dans le Problême devient impoſſible; & cela lorſque le premier axe de l'Hyperbole donnée eſt moindre que ſon parametre, car autrement elle reuſſira toujours.

COROLLAIRE I.

398. SI l'on prenoit dans le Problême precedent la quatriéme équation au lieu de la cinquiéme, & qu'on fit la conſtruction de même en ſe ſervant de l'Ellipſe qui eſt le lieu de cette équation, au lieu de l'Hyperbole qui eſt le lieu de la cinquiéme: il eſt viſible que l'on conſtruiroit l'égalité propoſée z^4 &c. par le moyen d'un cercle donné & d'une Ellipſe ſemblable à une donnée; ou avec une Ellipſe donnée & un cercle.

COROLLAIRE II.

399. IL eſt évident qu'on peut rendre la conſtruction precedente generale pour toutes ſortes d'égalités du troiſiéme & du quatriéme degré, en obſervant 1°. De faire évanoüir le ſecond terme de l'égalité donnée, lorſqu'elle en a un; de la multiplier enſuite par ſa racine z lorſqu'elle n'eſt que du troiſiéme degré; & de prendre un plan ab égal à tous les plans qui multiplient zz, un ſolide aac égal à tous les ſolides qui multiplient z, & enfin un ſurſolide a^3d égal à tous les ſurſolides

données. 2°. D'effacer dans les valeurs de AD, DC, CF, AH, IH, LK, les termes où se trouve b lorsque zz ne se rencontre point dans l'égalité donnée, ceux dans lesquels se rencontrent c ou d lorsque le quatriéme ou le cinquiéme terme manquent : & de changer de signes tous les termes où b se rencontre avec une dimension impaire, si le troisiéme terme de l'équation donnée a un signe different du troisiéme de la precedente ; comme aussi ceux dans lesquels c ou d se rencontrent avec une dimension impaire lorsque le quatriéme ou le cinquiéme terme ont des signes differens des quatriéme & cinquiéme de l'égalité precedente. 3°. De prendre du côté de PM ces lignes lorsque leurs valeurs sont positives, & du côté opposé lorsquelles sont negatives.

REMARQUE

400. ON peut toujours rendre la construction precedente plus simple dans les égalités particulieres qu'on se propose de construire, en faisant en sorte que a soit égal à b ; car il n'y a qu'à reduire l'égalité donnée sous cette forme $z^4 \mp aazz \mp aacz \mp a^3d = o$, au lieu de cette autre $z^4 \mp abzz \mp aacz \mp a^3 d = o$. Ce qui a empêché de le faire d'abord, c'est qu'on avoit en vûë de rendre la construction du Problême generale pour tous les cas, comme l'on vient de faire dans le Corollaire precedent, & que pour cet effet il falloit que chaque terme de l'égalité renfermât des lettres differentes b, c, d, au premier degré.

PROPOSITION VI.

Problême.

401. Fig. CCXXII. *TROUVER les racines de l'égalité* $z^4 - bz^3 - aczz + aadz + aahh = o$, *par le moyen d'une Hyperbole donnée entre les Asymptotes, & d'un cercle.*

Ayant fait $z = \frac{ax}{f}$, on transformera l'égalité donnée en cette autre $x^4 - \frac{bf}{a} x^3 - \frac{cff}{a} xx + \frac{df^3}{a} x + \frac{bhf^4}{aa} = o$. Ayant mené d'un point quelconque M de l'Hyperbole donnée qui a pour centre le point A, une parallele MP à l'une des Asymptotes AQ, & qui rencontre l'autre au point P, on

nommera les inconnuës & indéterminées AP, x; PM, y; lesquelles font entr'elles un angle donné APM, & on aura par la proprieté de l'Hyperbole $xy = mm$, en supposant que mm en soit la puissance. Maintenant si l'on prend $f = m\sqrt{\frac{a}{b}}$, on aura $bff = amm$, & $\frac{bbf^4}{aa} = m^4 = xxyy$: & mettant à la place de $\frac{bbf^4}{aa}$ qui est le dernier terme de l'égalité precedente sa valeur $xxyy$, & divisant ensuite par xx, on trouvera $xx - \frac{bf}{a}x - \frac{cff}{a} + \frac{df^3}{ax} + yy = o$, qui se change (en mettant dans le terme $\frac{df^3}{ax}$ à la place de x sa valeur $\frac{bff}{ay}$ trouvée par le moyen de l'équation $xy = mm = \frac{bff}{a}$) en cette autre $xx - \frac{bf}{a}x - \frac{cff}{a} + \frac{df}{b}y + yy = o$, dont le lieu est * un cercle lorsque l'angle APM est droit. * Art. 328 & 329.

Mais lorsque l'angle APM n'est pas droit, ou (ce qui revient au même) lorsque l'Hyperbole donnée n'est pas équilatere, il est évident que le lieu de la derniere équation n'est plus un cercle, mais une Ellipse. C'est pourquoi afin de trouver une équation dont le lieu soit un cercle, je prens sur l'Asymptote AP la partie $AB = 2a$: & ayant mené BE parallele à l'autre Asymptote AQ, je tire du centre A la perpendiculaire AE sur BE: & nommant les données BE, g; AE, e; je multiplie l'équation $xy - mm = o$, dont l'Hyperbole donnée est le lieu, par $\frac{g}{a}$; & j'ai $\frac{gxy}{a} - \frac{gmm}{a} = o$. J'ajoûte ensuite cette équation à la precedente lorsque l'angle fait par les Asymptotes est aigu, & je l'en retranche lorsqu'il est obtus comme je le suppose dans cette figure: cela me donne $yy - \frac{g}{a}xy + \frac{df}{b}y + xx - \frac{bf}{a}x - \frac{cff + gmm}{a} = o$, dont le lieu est un cercle * qui se construit ainsi. * Art. 327 & 329.

Soit prise sur l'Asymptote AQ la partie $AD = \frac{df}{2b}$ du côté opposé à PM: soit tirée parallelement à AE, la ligne $DC = \frac{bf}{e} - \frac{dgf}{2eb}$ du côté de PM lorsque cette valeur est positive, & du côté opposé lorsqu'elle est negative: Enfin du centre C & du rayon $CM = \sqrt{\overline{AC}^2 + \frac{cff - gmm}{a}}$ soit décrit un cercle. Je dis qu'il coupera l'Hyperbole donnée & son opposée en des points M, d'où ayant mené des paralleles MP à l'Asymptote AQ; les parties AP de l'autre Asymptote exprimeront les racines de l'égalité $x^4 - \frac{bf}{a}x^3 - \frac{cff}{a}xx + \frac{df^3}{a}x + \frac{bbf^4}{aa} = o$: sçavoir celles qui sont du côté de PM, les vraies; & celles qui sont du côté opposé, les fausses. Fig. CCXXII.

Mais on abregera beaucoup la conſtruction en obſervant 1°. De prendre pour l'unité arbitraire a la ligne m racine de la puiſſance de l'Hyperbole donnée, qui eſt le lieu de l'équation $xy = mm = aa$, puiſque $m = a$. 2°. De profiter de l'indéterminée r pour égaler le dernier terme $aaqr$ avec $a^4 = xxyy$: ce qui donne $r = \frac{aa}{q}$ 3°. Que le cercle qui doit déterminer par ſes interſections les racines de l'égalité coupera neceſſairement l'Hyperbole lorſqu'il y a $- aaq$, & ſon oppoſée lorſque c'eſt $+ aaq$, en un point K, d'où ayant mené une parallele KH à l'Aſymptote AQ, la partie AH de l'autre Aſymptote doit être égale à r, puiſque l'égalité du quatriéme degré a pour une de ſes racines $x = \mp r$. De là on tire cette conſtruction qu'il eſt facile de rendre generale pour toutes les égalités du troiſiéme degré. FIG. CCXXIII.

Je ſuppoſe que l'angle fait par les Aſymptotes de l'Hyperbole donnée ſoit aigu, & qu'ayant pris pour l'unité arbitraire a la racine de la puiſſance de l'Hyperbole donnée, on ait réduit l'égalité donnée du troiſiéme degré ſous cette expreſſion $x^3 - nxx - apx - aaq = 0$. Ayant pris ſur l'Aſymptote AP la partie $AB = 2a$, & mené BE parallele à l'autre Aſymptote AQ, on tire du centre A la perpendiculaire AE ſur BE; & ayant pris ſur AQ la partie $AL = q$ du côté de PM, parce qu'il y a $- aaq$ dans l'égalité donnée, on tirera LK parallele à AP, & qui rencontre l'Hyperbole au point K. Cela fait, on nommera les données BE, g; AE, e; LK, r; & on prendra ſur l'Aſymptote AQ la partie $AD = \frac{pr}{2a} - \frac{1}{2}q = \mp d$ pour abreger, & on tirera $DC = \frac{an + ar \mp dg}{e}$ parallele à AE, en obſervant de prendre ou mener ces lignes du côté de PM lorſque leurs valeurs ſont poſitives & du côté oppoſé lorſqu'elles ſont negatives. On décrira enfin du centre C, & du rayon CK, un cercle qui coupera les Hyperboles oppoſées en des points M, d'où ayant mené des droites MP paralleles à l'Aſymptote AQ; les parties AP de l'autre Aſymptote ſeront les racines de l'égalité propoſée $x^3 - nxx - apx - aaq = 0$.

Car prolongeant les droites MP, KH, juſqu'à ce qu'elles rencontrent la ligne DC auſſi prolongée, s'il eſt neceſſaire aux points G, F; on aura (à cauſe des triangles rectangles CFK, CGM) ces deux égalités $\overline{GM}^2 + \overline{CG}^2 = \overline{CM}^2$, & $\overline{FK}^2 + \overline{CF}^2$

$= \overline{CK}^2$: & parconſequent $\overline{GM}^2 + \overline{CG}^2 = \overline{FK}^2 + \overline{CF}^2$, puiſque les lignes CM, CK, ſont rayons d'un même cercle. Or par la conſtruction (je ſuppoſe ici pour éviter l'embarras des ſignes + & —, que $\frac{gr}{2a} - \frac{1}{2}q = +d$, c'eſt à dire, que cette valeur eſt poſitive) GM ou $PM + PG = y + \frac{g}{2a}x + d$, CG ou $DG - DC = \frac{ex}{2a} - \frac{an - ar - dg}{e}$, FK ou $KH + HF = q + \frac{g}{2a}r + d$, CF ou $CD - DF = \frac{an + ar + dg}{e} - \frac{er}{2a}$. C'eſt pourquoi mettant à la place de ces lignes leurs valeurs analytiques dans l'égalité precedente $\overline{GM}^2 + \overline{CG}^2 = \overline{FK}^2 + \overline{CF}^2$ on en formera d'abord celle-ci $yy + \frac{g}{a}xy + 2dy + \frac{gg + ee}{4aa}xx - nx - rx = qq + \frac{g}{a}rq + 2dq + \frac{gg + ee}{4aa}rr - nr - rr$, en s'épargnant la peine d'écrire de part & d'autre les quarrés de d & de $\frac{an + ar + dg}{e}$ qui ſe détruiſent mutuellement. Si l'on conſidere à preſent qu'à cauſe de l'Hyperbole, le rectangle $xy = rq$, & qu'à cauſe du triangle rectangle AEB le quarré $4aa = gg + ee$, on changera l'équation precedente en celle-ci $yy + 2dy + xx - nx - rx = qq + 2dq - nr$, dans laquelle mettant d'abord à la place de $2d$ ſa valeur $\frac{gr}{a} - q$, & enſuite à la place de y & yy leurs valeurs $\frac{aa}{x}$ & $\frac{a^4}{xx}$, & ordonnant l'égalité il vient

$$\begin{array}{l} x^4 - nx^3 - apxx - aaqx + a^4 = 0, \\ \quad\;\; - r \quad\; + nr \quad\;\; + apr \end{array}$$

qui étant diviſé par $x - r$, donne enfin $x^3 - nxx - apx - aaq = 0$, qu'il falloit conſtruire.

Pour rendre cette conſtruction generale il faut obſerver, 1°. De prendre la partie AL ſur l'Aſymptote AQ du côté oppoſé à PM lorſqu'il y a $+ aaq$ dans l'égalité donnée ; & de changer de ſignes les termes où q & r ſe rencontrent dans les valeurs de AD, DC, 2°. De changer de ſignes le terme où p ſe rencontre dans la valeur de AD lorſqu'il y a $+ apx$ dans l'égalité donnée, & de l'effacer lorſque ce terme y manque : il faut faire la même choſe à l'égard du terme où n ſe rencontre dans la valeur de DC, lorſqu'il y a $- nxx$. 3°. De changer de ſigne le terme où g ſe rencontre dans la valeur de DC, lorſque l'angle fait par les Aſymptotes eſt obtus, & de l'effacer lorſqu'il eſt droit, en obſervant alors que $e = 2a$.

REMARQUE.

404. L'ALGEBRE nous fournit des moyens faciles pour transformer toute égalité du quatriéme degré, en une autre du même degré dont les signes des termes soient alternatifs. Or comme alors son dernier terme aura toujours le signe +, il est visible qu'en se servant de cette preparation lorsque le dernier terme de l'égalité qu'on veut construire a le signe —, on rend la methode du Problême generale pour toutes sortes d'égalités du quatriéme degré. Mais parce que toutes les racines réelles d'une égalité, sont vraies, lorsque les signes de ses termes sont alternatifs; il s'ensuit qu'on n'a besoin alors que de l'Hyperbole donnée, puisque son opposée qui ne sert que pour les racines fausses devient inutile.

PROPOSITION VII.

Problême.

405. *SOIT proposée à construire l'égalité du sixiéme degré* $x^6 - bx^5 + acx^4 + aadx^3 + a^3exx - a^4fx + a^5g = 0$, ou $x^6 - bx^5 + cx^4 + dx^3 + exx - fx + g = 0$ (*en sousentendant la ligne* a *qui rend le nombre des dimensions égal dans chaque terme, & que l'on regarde comme l'unité*); *par le moyen d'un cercle, & d'un lieu du troisiéme degré.*

Je prends pour le lieu du troisiéme degré $x^3 - mxx - nx + q = -pxy$, dans lequel les quantités m, n, p, q, que l'on regarde comme données, se doivent déterminer d'une maniere convenable pour satisfaire au Problême; ce que je fais en cette sorte:
en quarrant chaque membre, j'ai

$$\begin{array}{l} x^6 - 2mx^5 + mmx^4 + 2mnx^3 + nnxx - 2nqx + qq = ppxxyy. \\ \qquad\qquad -2n \qquad +2q \qquad -2mq \end{array}$$

& comparant les termes $-2mx^5$, $-2nqx$, $+qq$ avec leurs correspondans dans la proposée $-bx^5$, $-fx$, $+g$, je trouve $m = \frac{1}{2}b$, $q = \sqrt{g}$, $n = \frac{f}{2\sqrt{g}}$; & par consequent $x^6 - 2mx^5 - 2nqx + qq = x^6 - bx^5 - fx + g$. Si l'on met à present à la place de $x^6 - 2mx^5 - 2nqx + qq$ sa valeur $ppxxyy - mmx^4$ &c. trouvée par le moyen de l'équation precedente, & à la place de $x^6 - bx^5 - fx + g$ sa valeur

$-cx^4 - dx^3$ &c. trouvée par le moyen de l'égalité donnée, & qu'ayant divisé par xx, on transpose toutes les quantités du même côté, on formera cette équation

$$\begin{array}{llll} ppyy & -\,mmxx & -\,2mnx & -\,nn = 0, \\ & +\,2n & -\,2q & +\,2mq \\ & +\,c & +\,d & +\,e \end{array}$$

* Art. 328. & 329. dont le lieu sera * un cercle si la quantité $c + 2n - mm$ (qui multiplie le quarré xx) est positive, & qu'on prenne $pp = c + \frac{f}{\sqrt{g}} - \frac{1}{4}bb$; car divisant par pp, & faisant pour abreger $2r = \frac{2mn + 2q - d}{pp}$ & $ss = \frac{2mq + e - nn}{pp}$ ou $\frac{nn - 2mq - e}{pp}$, on aura $yy + xx - 2rx \mp ss = 0$: sçavoir $+ss$ lorsque $2mq + e$ surpasse nn; & $-ss$, lorsqu'il est moindre.

Pour construire la ligne courbe qui est le lieu de la premiere équation $x^3 - xx - nx + q = -pxy$, je suppose à l'ordinaire deux lignes droites inconnuës & indéterminées AP (Fig. CCXXIV.) (x), PM (y) qui fassent entr'elles un angle droit APM; & je tire par l'origine A des x, une ligne droite indéfinie AQ parallele à PM, sur laquelle ayant pris du côté de PM la partie $AG\ \frac{n}{p}$, & du côté opposé la partie $GB = \frac{q}{mp}$, je mene du côté de PM la droite $BC = m$ perpendiculaire à AQ. Cela fait, je décris sur un plan separé une Parabole MEM qui ait pour parametre de son axe la ligne $p = \sqrt{c + 2n - mm}$, & ayant placé ce plan sur celui-ci en sorte que l'axe de la Parabole se confonde avec la ligne AQ & que la Parabole s'étende vers le côté opposé à PM, je prends sur cet axe depuis son origine E vers le dedans de la Parabole la partie $EF = BG = \frac{q}{mp}$. Je me sers enfin d'une longue regle indéfinie CF mobile autour du point fixe C, & qui passe toujours par le point F, & la faisant tourner autour du point C, en sorte qu'elle fasse glisser la partie EF de l'axe de la Parabole le long de la ligne AQ. Je dis que les deux intersections continuelles M, M, de cette regle avec la Parabole MEM décriront dans ce mouvement deux lignes courbes qui seront le lieu qu'on demande. Car par la construction AB ou $AG - GB = \frac{n}{p} - \frac{q}{mp}$, & par la proprieté de la Parabole $EQ = \frac{xx}{p}$ puisque AP ou $MQ = x$. Or les triangles semblables FQM, MDC, donnent FQ ou $EQ - EF$ $(\frac{xx}{p} - \frac{q}{mp})$. QM (x) :: DM ou $PM - AB$ $(y + \frac{q}{mp} - \frac{n}{p})$. CD $(m - x)$.

Donc

Donc en multipliant les extrêmes & les moyens, on aura $x^3 - mxx - nx + q = -pxy$. Et si l'on prend successivement les points *M* dans les trois angles qui suivent celui ci, on trouvera toujours la même équation, en observant de faire $AP = -x$ & $PM = -y$ lorsque les points *P* & *M* tombent du côté opposé à celui-ci : de sorte que ces deux lignes courbes, qu'on peut appeller *conchoïdes paraboliques*, seront le lieu complet de toutes les valeurs tant vraies que fausses de l'inconnuë y, qui répondent à toutes les valeurs tant vraies que fausses de l'autre inconnuë x, dans l'égalité $x^3 - mxx - nx + q = -pxy$.

Pour construire le cercle qui est le lieu de la seconde équation $yy + xx - 2rx \mp ss = o$, il n'y a qu'à prendre sur la droite indéfinie *AP* la partie $AH = r$ du côté de *PM* lorsque la valeur de r est positive, & du côté opposé lorsqu'elle est négative; ensuite du centre *H* & du rayon $HM = \sqrt{rr \pm ss}$, sçavoir $-ss$, lorsqu'il y a $+ss$ dans l'équation, & $+ss$ lorsque c'est $-ss$, décrire un cercle; car à cause du triangle rectangle *HPM*, on aura toujours $\overline{HM}^2 = \overline{HP}^2 + \overline{PM}^2$, c'est à dire en mettant les valeurs analytiques, & transposant tous les termes d'un côté $yy + xx - 2rx \mp ss = o$.

Je dis maintenant que si des points *M* où ce cercle rencontre les conchoïdes paraboliques on mene des perpendiculaires *MQ* sur la droite indéfinie *AQ*; ces lignes seront les racines de l'égalité proposée: sçavoir celles qui tombent à droit, les vraies; & celles qui tombent à gauche, les fausses. Car menant des paralleles *MP* à *AQ*, on trouve par la proprieté des conchoïdes cette équation $x^3 - mxx - nx + q = -pxy$, c'est à dire en quarrant chaque membre, $ppxxyy = + x^6 - 2mx^5$ &c; & par la proprieté du cercle, cette autre $yy + xx - 2rx \mp ss = o$, laquelle étant multipliée par $ppxx$ donne $ppxxyy = - ppx^4 + 2pprx^3 \pm ppssxx$. Et comparant ensemble ces deux valeurs de $ppxxyy$, on formera une égalité dans laquelle si l'on met à la place de $2r$, ss, pp, m, n, q, leurs valeurs, on retrouvera l'égalité proposée $x^6 - bx^5$ &c.

S'il y avoit dans l'égalité proposée $-dx^3$ au lieu de $+dx^3$, il est visible qu'en prenant alors $2r = \frac{2mn + 2q + d}{pp}$, le reste de

la construction ne changeroit point, puisque d ne se rencontre que dans la valeur de r. Et comme alors tous les signes des termes de l'égalité proposée sont alternatifs; c'est une maxime reçuë en Algebre que toutes ses racines réelles seront vraies; c'est à dire, que si cette égalité a deux racines réelles & quatre imaginaires, les deux réelles seront vraies; si elle en a quatre réelles & deux imaginaires, les quatre seront vraies; & enfin si toutes les six sont réelles, elles seront toutes vraies. D'où l'on voit qu'on n'a besoin alors que de la conchoïde qui est décrite par la moitié de la Parabole qui tombe du côté du point fixe C, puisque l'autre ne sert que pour les racines fausses.

S'il arrivoit que la valeur du rayon du cercle fût nulle ou imaginaire, ou enfin si petite qu'il ne touchât, ni ne coupât les deux conchoïdes en aucun point; ce seroit une marque infaillible que toutes les racines de l'égalité seroient imaginaires. S'il les coupoit en six points, toutes les racines seroient réelles. Et enfin s'il ne les coupoit qu'en quatre ou en deux, il n'y auroit que quatre ou deux racines réelles, & les autres seroient imaginaires. Il faut toujours prendre garde que si le cercle touchoit l'une des conchoïdes en quelque point, on doit regarder ce point comme s'il réünissoit deux points infiniment proches, en sorte que l'égalité proposée auroit deux racines égales à la perpendiculaire menée de ce point sur BE.

REMARQUE I.

406. IL suit de la description des deux conchoïdes paraboliques, 1°. Qu'elles ont pour Asymptote commune la droite BE infiniment prolongée de part & d'autre. 2°. Qu'une des conchoïdes passe par le point fixe C, & qu'alors la regle CF la touchera en ce point; puisque le point M se réünissant au point C, la regle passe par deux points infiniment proches de cette ligne courbe. 3°. Que lorsque le point F tombe sur B, la regle CF qui décrit par les interfections M, M, avec la Parabole les conchoïdes, tombe sur CB, & qu'ainsi la ligne MFM devient la double ordonnée qui part du point F: c'est à dire que la ligne CB rencontre les deux conchoïdes en deux points K, L, tels que BK & BL sont égales chacunes à l'ordonnée à l'axe de la Parabole qui part du point F. D'où il est clair

que si BC étoit égale à cette ordonnée, le point K tomberoit alors sur le point C; & qu'ainsi la ligne BC qui passeroit par deux points infiniment proches K, C de la conchoïde la toucheroit en se réunissant toute entiere dans le seul point C.

Il n'est pas necessaire de se servir de la Parabole MEM pour trouver les points des conchoïdes; car ayant pris sur BE la partie BO égale au parametre de la Parabole, & décrit d'un diametre quelconque OR plus grand que OB un cercle qui coupe BC aux points D, D; on prendra sur ce diametre la partie RS égale à EF, & on tirera par le point fixe C les deux droites CM, CM, paralleles à DS, DS, qui rencontreront les paralleles DM, DM, à EB en des points M, M, qui seront aux deux conchoïdes. Car ayant prolongé CM jusqu'à ce qu'elle rencontre l'Asymptote BE au point F; & mené MQ parallele à BC; il est clair que les triangles rectangles MQF, DBS, seront égaux, & qu'ainsi FQ est égale à BS. Or ayant pris RS égale à EF; on aura $EF + FQ$, ou $EQ = RS + SB$ ou RB; & la Parabole EM qui a pour sommet le point E, & pour parametre une ligne égale à BO, passera par le point M; puisque par la proprieté du cercle le quarré de BD ou MQ est égal au rectangle de BR ou EQ par le parametre de BO; ce que donne aussi la proprieté de la Parabole. D'où il suit que le point M trouvé par cette construction, n'est pas different de celui que donneroit l'intersection de la regle CF avec la demie Parabole EM. *Et c'est ce qu'il falloit démontrer.* Fig. CCXXV.

Si le point D étoit donné, il ne faudroit pour avoir le point R, que mener DR perpendiculaire à OD; & le reste de la construction ne changeroit point.

J'avertirai ici en passant, 1°. Que si l'on prend sur BC du côté du point C, une partie BD égale à la vraie racine de l'égalité du troisiéme degré $x^3 - \frac{1}{2}mxx - \frac{1}{2}mnp = 0$ (les données $BC = m$, $EF = n$, $BO = p$); & qu'on trouve ensuite le point M comme l'on vient d'enseigner: ce point sera plus éloigné de la droite BC que tous les autres points de la portion KMC, de sorte que la tangente qui passe par ce point sera parallele à BC. 2°. Que si l'on prend sur BC prolongée de l'autre côté du point B, une partie BD égale à la vraie racine de l'égalité $x^3 - mnp = 0$; le point M de la conchoïde, qui répond au point D, en sera le point d'inflexion: c'est à dire le point où de concave elle devient convexe. Comme ceci dépend

des principes que j'ai établis dans mon Livre des Infiniment petits, on doit le ſuppoſer comme vrai, & remetre à en chercher la raiſon après avoir lû ce Livre ou quelque choſe d'équivalent, d'autant plus que cela eſt inutile pour la reſolution des égalités du ſixiéme degré dont il eſt ici queſtion.

REMARQUE II.

407. IL eſt viſible que pour décrire les deux conchoïdes paraboliques, il faut 1°. Que la ligne BC ($\frac{1}{2}b$) ait quelque grandeur, & qu'ainſi l'égalité propoſée doit avoir un ſecond terme. 2°. Que le terme q ne peut être nul dans l'équation $x^3 - mxx - nx + q = -pxy$, puiſqu'en diviſant par x, elle deviendroit cette autre $xx - mx - n = -py$, dont le lieu eſt une Parabole; d'où il eſt clair que le dernier terme g ſe doit trouver dans l'égalité propoſée avec le ſigne $+$, puiſque $q = \sqrt{g}$.

De plus ſi le terme fx avoit le ſigne $+$, on lui donneroit le ſigne $-$ en changeant auſſi les ſignes du deuxiéme & du quatriéme terme; ce qui ne troubleroit point l'égalité, mais changeroit ſeulement les racines fauſſes en vraies & les vraies en fauſſes. Et afin que le lieu de la deuxiéme équation pût être un cercle, il faudroit que $\frac{f}{\sqrt{g}} \mp c$ (ſçavoir $+c$ lorſqu'il y a $+cx^4$, & $-c$ lorſqu'il y a $-cx^4$) ſurpaſſât $\frac{1}{4}bb$. D'où l'on voit que le terme fx manquant, il faut que le terme cx^4 ait le ſigne $+$, & que c ſurpaſſe $\frac{1}{4}bb$; & que ſi le terme cx^4 manque, $\frac{f}{\sqrt{g}}$ doit ſurpaſſer $\frac{1}{4}bb$.

Il eſt donc évident que ce ſont là les conditions que doit avoir neceſſairement l'égalité propoſée du ſixiéme degré, afin qu'on la puiſſe conſtruire immediatement par le moyen des conchoïdes paraboliques, & du cercle, comme l'on vient de faire la precedente.

REMARQUE III.

408. LORSQUE l'égalité donnée n'eſt que du cinquiéme degré, on peut ſouvent en l'élevant au ſixiéme, lui donner en même temps toutes les conditions neceſſaires pour être conſtruite immediatement. En voici quelques exemples.

Soit 1°. $x^5 - a^4b = 0$; où l'on ſuppoſe que a ſurpaſſe b. Je multiplie cette égalité par $x - b$, pour avoir celle du ſixiéme

$x^6 - bx^5 - a^4bx + a^4bb = 0$, qui a toutes les conditions requiſes dans la remarque precedente.

Soit 2°. $x^5 - 5aax^3 + 5a^4x - a^4b = 0$, dans laquelle a ſurpaſſe b. Je multiplie cette égalité par $x - b$, & j'ai $x^6 - bx^5 - 5aax^4 + 5aabx^3 + 5a^4xx - 5a^4bx + a^4bb = 0$, qui a toutes les conditions neceſſaires.

Soit 3°. $x^5 - ax^4 - 4aax^3 + 3a^3xx + 3a^4x - a^5 = 0$. Je multiplie cette égalité par $x - 4a$; ce qui me donne $x^6 - 5ax^5 + 19a^3x^3 - 9a^4xx - 13a^5x + 4a^6 = 0$, qui eſt une égalité du ſixiéme degré, dans laquelle toutes les conditions neceſſaires ſe rencontrent.

Il eſt bon d'avertir que la premiere égalité $x^5 - a^4b = 0$, ſert à trouver quatre moyennes proportionnelles entre les deux extrêmes A, B; que la ſeconde $x^5 - 5aax^3$ &c. ſert à diviſer un angle donné en cinq parties égales; & enfin que la troiſiéme $x^5 - ax^4$ &c. ſert à inſcrire dans un cercle donné un Polygone regulier de onze côtés: & c'eſt ce qu'on verra dans les articles du Livre ſuivant. Je vais donner la conſtruction de la premiere de ces égalités, afin qu'on la puiſſe comparer avec celle qu'on trouve à la fin du troiſiéme Livre de la Geometrie de M. Deſcartes.

Ayant décrit une Parabole ME qui ait pour le parametre de ſon axe une ligne $p = \sqrt{aa - \frac{1}{4}bb}$, & pris du côté que l'on voit dans la figure les lignes $AG = \frac{aa}{2p}$, GB ou $EF = 4AG$, $BC = \frac{1}{2}b$, $AH = \frac{5aab}{4pp}$, & une ligne $s = \frac{a}{2p}\sqrt{4bb - aa}$, ou $\frac{a}{2p}\sqrt{aa - 4bb}$; on décrira d'abord une conchoïde parabolique COM (comme l'on a enſeigné dans l'article 404) à l'aide de la Parabole ME, & d'une longue regle CF qui tourne librement autour du point fixe C, & qui paſſe toujours par le point F, pendant que la partie EF de l'axe de la Parabole gliſſe le long de la ligne AQ; & enſuite un cercle du centre H & du rayon $HM = \sqrt{\overline{AH}^2 + ss}$, ſçavoir $+ss$ lorſque $4bb$ ſurpaſſe aa, & $-ss$ lorſqu'il eſt moindre. Je dis que ſi des points O, M, où ce cercle rencontre la conchoïde, on mene des perpendiculaires OR, MP, ſur AP; les parties AR, AP, ſeront les racines de l'égalité $x^6 - bx^5 - a^4bx + a^4bb = 0$. Cela ſe prouve comme dans l'article 404. FIG. CCXXVI.

On peut s'épargner la peine de trouver une ligne $s = \frac{a}{2p}\sqrt{4bb - aa}$, ou $\frac{a}{2p}\sqrt{aa - 4bb}$; si l'on fait attention que le cercle décrit du centre H, doit couper la conchoïde COM en un point O, tel qu'ayant mené OR perpendiculaire sur AP, on a la partie $AR = b$; puisque l'une des racines de cette égalité est $x = b$. C'est pourquoi ayant pris sur AP la partie $AR = b$, & tiré RO perpendiculaire à AP & qui rencontre en O la conchoïde COM ; il n'y a qu'à décrire du centre H & du rayon HO un cercle. Car il la coupera en un autre point M, tel, qu'ayant mené MP perpendiculaire sur AP, la ligne AP sera la plus grande des quatre moyennes proportionnelles qu'on demande. Comme le cercle décrit du centre H ne coupe la conchoïde qui passe par le point C qu'en deux points O, M, & ne rencontre point l'autre ; il s'ensuit que l'égalité proposée $x^6 - bx^5$ &c. n'a que deux racines vraies AR, AP, & les quatre autres imaginaires.

REMARQUE IV.

409. LORSQUE l'égalité donnée du sixiéme degré n'a point les conditions necessaires pour être construite immediatement par la methode que l'on vient d'expliquer, ou bien qu'étant du cinquiéme degré, la remarque precedente se trouve inutile, on pourra se servir de la preparation qu'enseigne M. Descartes dans le troisiéme Livre de sa Geometrie. On y trouve la maniere de transformer toute égalité du cinquiéme ou du sixiéme degré en une autre du sixiéme, dans laquelle tous les termes se rencontrent avec des signes alternatifs, & où la quantité connuë du troisiéme terme surpasse le quarré de la moitié de la quantité connuë du second : ce qui rend la construction du Problême generale pour toutes sortes d'égalités du cinquiéme & du sixiéme degré. Je ne m'arrêterai point ici à expliquer cette preparation, parce qu'elle dépend de l'Algebre pure dont je n'ai point entrepris de parler, & que d'ailleurs je vais donner dans la proposition suivante une construction generale pour toutes sortes d'égalités du cinquiéme & du sixiéme degré, qui ne suppose point d'autre preparation que celle de faire évanoüir le second terme.

PROPOSITION VIII.

Problême.

410. *TROUVER les racines de l'égalité* $x^6 - bx^4 - cx^3 + dxx - fx + g = 0$, *par le moyen d'une premiere Parabole cubique donnée, & d'une Section conique.* FIG. CCXXVII

Soit $aay = x^3$ l'équation dont le lieu eſt la premiere Parabole cubique *MAM* ($AP = x$, $PM = y$, $AB = a$). Je mets dans l'égalité propoſée à la place de x^6 ſa valeur a^4yy, à la place de x^4 ſa valeur $aaxy$, & à la place de x^3 ſa valeur aay; ce qui la change en cette équation du ſecond degré $yy - \frac{b}{aa}xy - \frac{c}{aa}y + \frac{d}{a^4}xx - \frac{f}{a^4}x + \frac{g}{a^4} = 0$, dont le lieu eſt une Ellipſe * lorſque d ſurpaſſe $\frac{1}{4}bb$, c'eſt à dire, lorſque la quantité connuë qui multiplie xx ſurpaſſe le quarré de la moitié de la quantité connuë qui multiplie x^4, comme je le ſuppoſe ici. Et ſi l'on veut que la ligne qui fait l'office de l'unité dans l'égalité propoſée, & qui y eſt ſous entenduë, ſoit égale au parametre a de la Parabole cubique donnée ; cette équation ſe changera en celle-ci $yy - \frac{b}{a}xy - cy + \frac{d}{a}xx - fx + ag = 0$, dont voici la conſtruction. * Art. 323.

Ayant pris ſur la droite indéfinie *AP* la partie $AB = a$, on tirera parallelement à *PM* & du même côté les droites $BE = \frac{1}{2}b$, $AD = \frac{1}{2}c$: & on menera par le point *A* la droite *AE* (e), & par le point *D* une parallele *DG* à *AE*, ſur laquelle on prendra du côté de *PM* la partie $DC\,(s) = \frac{2afe + bee}{4ad - bb}$, & de part & d'autre du point C les parties *CK*, *CL*, égales chacune à $r = \sqrt{ss + \frac{cee - 4agee}{4ad - bb}}$. Cela fait, du diametre *LK* ($2r$) qui ait pour parametre une ligne $KH = \frac{4ade - bbe}{aee}$, & pour ordonnées des droites paralleles à *PM*, on décrira l'Ellipſe cherchée.

Maintenant ſi des points de rencontre de cette Ellipſe avec la Parabole cubique donnée, on abaiſſe des lignes *MP* qui faſſent avec *AP* l'angle donné ou pris à volonté *APM*, les parties *AP* de la droite indéfinie ſur laquelle s'étend l'indéterminée x ſeront les racines cherchées, ſçavoir celles qui tombent du côté où l'on a ſuppoſé *PM* en faiſant la conſtruction, les vraies ; & celles qui tombent du côté oppoſé, les fauſſes. Car

par la proprieté de la Section conique il vient $yy - \frac{b}{a}xy - cy + \frac{d}{a}xx - fx + ag = 0$, & par la proprieté de la Parabole cubique, $y = \frac{x^3}{aa}$; & mettant cette valeur à la place de y & son quarré à la place de yy dans l'équation precedente, on retrouve l'égalité donnée $x^6 - abx^4 - aacx^3$ &c. $= 0$.

REMARQUE I.

411. TOUTE égalité du cinquiéme ou du sixiéme degré étant donnée, si l'on en fait évanoüir le second terme, & qu'après l'avoir multipliée par l'inconnuë x lorsqu'elle n'est que du cinquiéme degré, on se serve du parametre a de la Parabole cubique donnée pour reduire sous l'expression ab les quantités connuës qui multiplient x^4, sous l'expression aac celles qui multiplient x^3 &c.; il est visible qu'en faisant la substitution comme ci-dessus, on transformera toûjours l'égalité donnée en un lieu du second degré. D'où l'on voit qu'ayant une fois décrit avec exactitude une Parabole cubique qui ait pour parametre une ligne quelconque a, & dont l'angle APM que font les appliquées PM avec le diametre AP, peut être pris à volonté; on pourra toûjours par son moyen, en décrivant de plus une Section conique convenable, resoudre toutes sortes d'égalités du cinquiéme & du sixiéme degré.

REMARQUE II.

412. LORSQU'APRE'S avoir fait évanoüir le second terme d'une égalité donnée du cinquiéme & du sixiéme degré, & l'avoir multipliée par l'inconnuë x si elle n'est que du cinquiéme; la quantité connuë qui multiplie le quarré xx est positive, & surpasse le quarré de la moitié de celle qui multiplie x^4: on arrivera toûjours en faisant la substitution par le moyen de $aay = x^3$, à une équation du second degré dont le lieu est une Ellipse, comme l'on a vû dans ce Problême. Or l'on pourra toûjours faire en sorte que cette Ellipse devienne un cercle, mais alors la Parabole cubique ne peut plus être donnée. Voici comment il s'y faudra prendre.

* Art. 378. Ayant trouvé une ligne a * dont le quarré de quarré a^4 soit égal à la quantité connuë qui multiplie xx, on se servira de cette ligne a pour reduire sous l'expression ab toutes

tes les quantités connuës qui multiplient x^4, sous l'expression aac celles qui multiplient x^3 &c; ce qui reduira l'égalité donnée sous cette forme $x^6 + abx^4 + aacx^3 + a^4xx + a^4fx + a^5g = 0$. Et mettant a^4yy, $aaxy$ & aay à la place de x^6, x^4 & x^3, on trouvera cette équation du second degré $yy + \frac{b}{a}xy + cy + xx + fx + ag = 0$, dont le lieu sera * un cercle, si l'on fait en sorte que l'angle AEB soit droit; ce qui est facile en cette maniere. * Art. 327. 329.

Ayant pris sur la droite indéfinie AP la partie $AB = a$, on décrira de cette ligne comme diametre un demi cercle AEB, du côté où l'on suppose que PM doit tomber, lorsqu'il y a $-\frac{b}{a}xy$, & du côté opposé lorsqu'il y a $+\frac{b}{a}xy$. On portera sur la demi circonference de B en E, une ligne $BE = \frac{1}{2}b$; & ayant tiré AE (e), la ligne PM doit être parallele à BE, & on achevera le reste de la construction comme pour l'Ellipse, qui deviendra alors un cercle; puisque l'angle CGM sera droit, & qu'à cause du triangle rectangle AEB il vient $ee = aa - \frac{1}{4}bb$, qui doit exprimer la raison du diametre LK à son parametre. La figure qui est ici à côté represente la construction de l'équation $yy - \frac{b}{a}xy - cy + xx - fx - ag = 0$, qui n'est differente de celle du Problême qu'en ce que $d = a$. FIG. CCXXVIII

Maintenant ayant pris sur la ligne AB autant de parties AP, AP, &c. qu'on voudra, & mené des paralleles PM, PM, &c. à BE; on prendra chaque PM égale à la quatriéme proportionnelle à sa correspondante AP & la donnée AB. Et faisant passer une ligne courbe MAM par tous les points M ainsi trouvés, il est évident qu'elle sera le lieu de l'équation $x^3 = aay$, & par consequent la premiere Parabole cubique qui par ses points d'intersection M, M, avec le cercle, servira à découvrir les racines AP, AP, de l'égalité proposée.

REMARQUE III.

413. COMME l'on a parlé souvent dans ce Livre des Paraboles de tous les degrés, & qu'on vient même d'employer la premiere Parabole cubique pour resoudre les égalités du cinquiéme & du sixiéme degré; je crois qu'il n'est pas hors de propos d'examiner les differentes figures qu'elles peuvent avoir. Soient donc données de position deux lignes droites indéfinies BC, DE,

FIG. CCXXIX. qui s'entrecoupent au point A, & soit dans l'angle BAD une Parabole AM de tel degré qu'on voudra, dont la nature est telle qu'ayant mené d'un de ses points quelconques M une parallele MP à DE, qui rencontre BC au point P; & ayant nommé les indéterminées AP, x; PM, y; la donnée AB, 1; on ait toûjours $x^m = y^n$ (les lettres m & n marquent les exposans des puissances de x & y qui peuvent être tels nombres positifs entiers qu'on voudra; & l'on suppose seulement que m surpasse n). Il est évident 1°. Que AP (x) étant nulle ou zero, PM (y) l'est aussi, & que plus AP (x) croît, plus aussi PM (y) augmente; & cela à l'infini. 2°. Que la soutangente PT * $(\frac{n}{m}x)$ est toûjours moindre que AP (x), puisque l'on suppose ici que n soit moindre que m. D'où il suit que la Parabole AM de tel degré qu'elle puisse être, passera toûjours par le point A; qu'elle s'éloignera de plus en plus à l'infini de la droite BC que l'on regarde comme son diametre; & enfin qu'elle tournera sa convexité du côté de ce diametre. Mais comme la ligne courbe AM qui tombe dans l'angle DAB, n'est qu'une portion de cette Parabole, il reste à examiner dans lequel des angles DAC, CAE, EAB, elle doit se continuer; & pour cela il faut distinguer trois differens cas.

* Art. 237.

Premier cas. Lorsque l'exposant m de la puissance de x est un nombre pair, & l'exposant n de la puissance de y un nombre impair. La racine m de x^m sera $\mp x$, & la racine n de y^n sera seulement $+y$; car soit par exemple, $m = 4$, & $n = 3$, il est clair que le quarré de quarré où la puissance quatriéme de $\mp x$ est toûjours x^4, & qu'il n'en est pas de même du cube de $\mp y$; puisque le cube de $+y$ est y^3, & celui de

FIG. CCXXIX. $-y$ est $-y^3$. De-là il est évident que AP (x) peut être positive & negative, & PM (y) toûjours positive; d'où l'on voit que la Parabole AM doit se continuer dans l'angle DAC, qui est à côté de l'angle BAD, en sorte que si par un point quelconque K de la ligne AD, on tire une parallele à BC elle rencontrera la Parabole MAM en deux points M, M, qui seront également éloignés du point K. Telle est la Parabole ordinaire qui est le lieu de l'équation $xx = ay$, ou $xx = y$ en faisant le parametre $a = 1$.

Second cas. Lorsque les exposans m & n sont des nombres impairs. La racine m de x^m sera seulement $+x$, & de même la racine n sera $+y$; mais parce que l'équation $-x^m =$

$-y^n$ est la même que $x^m = y^n$, & que la racine m de $-x^m$ est $-x$, & la racine n de $-y^n$ est $-y$; il s'ensuit que AP (x) peut être positive & negative de même que PM (y), en observant que lorsque AP est positive, PM l'est aussi, & au contraire. D'où l'on voit que la Parabole AM doit alors se continuer dans l'angle CAE opposé au sommet à l'angle BAD, dans une position toute semblable, mais renversée ; en sorte que prenant AP égale à AP, & menant PM qui fasse avec AP l'angle APM égale à l'angle APM ; cette ligne PM rencontre la portion AM qui tombe dans l'angle CAE, en un point M tel que PM est égal à PM. Telle est la premiere Parabole cubique $x^3 = aay$, où $x^3 = y$ en faisant $a = 1$. FIG.CCXXX.

Troisiéme cas. Lorsque l'exposant m de la puissance de x est un nombre impair, & l'exposant n de la puissance de y un nombre pair. La racine m de x^m sera toûjours $+x$, & la racine n de y^n sera $\mp y$; car soit par exemple, AM une seconde Parabole cubique qui est le lieu de l'équation $x^3 = ayy$, ou $x^3 = yy$, il est clair que la racine cubique de x^3 est seulement $+x$, & que celle de yy est $\mp y$. D'où il suit que la Parabole AM doit se continuer dans l'angle BAE qui est à côté de l'angle BAD ; en sorte que si l'on mene par un point quelconque P de la ligne AB une parallele à DE, elle rencontrera la Parabole entiere MAM en deux points M, M, également éloignés du point P. FIG.CCXXXI.

Or l'équation generale $x^m = y^n$ appartient toûjours à l'un de ces trois cas ; car si m & n étoient deux nombres pairs, on extrayeroit de part & d'autre la racine quarrée autant de fois qu'il seroit possible ; ce qui la reduiroit à une équation dont l'un des exposans seroit necessairement impair. Et l'on peut toûjours supposer que m surpasse n ; car s'il étoit moindre, & qu'on eût par exemple, $aax = y^3$, on trouveroit en rapportant les points de la Parabole AM à ceux de la ligne DE, & nommant alors AK, x ; KM, y ; cette autre équation $x^3 = aay$ qui exprimeroit aussi la nature de la même Parabole AM, & dans laquelle l'exposant de la puissance de x est plus grand que celui de la puissance de y ; de sorte qu'on pourroit faire alors le même raisonnement par rapport à la ligne DE, qu'on vient de faire par rapport à la ligne BC. De-là il est évident que toutes les Paraboles de tel degré qu'elles puissent être, auront toûjours l'une des trois figures precedentes. FIG.CCXXXII.

PROPOSITION IX.

Problême.

414. *Soit proposée à construire l'égalité du huitiéme degré* $x^8 - bx^7 + cx^6 - dx^5 + ex^4 - fx^3 + gxx - hx + l = 0$, *dans laquelle aucun terme ne manque, par le moyen de deux lieux geometriques ; l'un du second degré, & l'autre du quatriéme.*

Ayant pris $xx = ay$ pour le lieu du second degré, on substituera à la place de x^8, x^7, x^6, x^5, x^4, x^3, & xx, leur valeurs a^4y^4, a^3y^3x, a^3y^3, $aayyx$, $aayy$, ayx, ay, & en prenant la droite donnée a pour l'unité, on aura cette autre équation $y^4 - \frac{b}{a}xy^3 + cy^3 - dxyy + aeyy - afxy + aagy - aabx + a^3l = 0$ dont le lieu est du quatriéme degré, & des plus simples, puisque l'une des inconnuës x n'étant qu'au premier degré, on pourra en déterminer tous les points en ne se servant que de cercles & de lignes droites.

Si l'on construit à present la Parabole qui est le lieu de la premiere équation $xx = ay$, & qu'ayant pris pour y autant de differentes grandeurs que l'on voudra ; on détermine les valeurs de x qui leur répondent dans la seconde équation ; le lieu qui passera par les extrêmités de toutes les y, & qui sera par consequent celui de la seconde équation, déterminera par le moyen des points où il rencontre la Parabole, les valeurs cherchées des racines de l'équation donnée. Ce qui est visible ; puisque mettant dans cette seconde équation pour y sa valeur $\frac{xx}{a}$, & pour les puissances de y les puissances de cette valeur, on trouve l'équation donnée $x^8 - bx^7$ &c. $= 0$.

COROLLAIRE I.

415. Comme l'unité a est arbitraire, on peut supposer qu'elle est donnée, & qu'ainsi la Parabole qui est le lieu de la premiere équation $xx = ay$ est donnée. Or il est évident qu'on pourra toûjours par le moyen de cette équation transformer toute égalité du septiéme ou huitiéme degré, en une autre équation du quatriéme, dans laquelle l' incon-

nuë x ne se trouve qu'au premier degré. D'où il suit que toute égalité du septiéme ou du huitiéme degré, dans laquelle ou tous les termes se rencontrent ou seulement une partie, se pourra toujours construire par le moyen d'une Parabole donnée & d'un lieu du quatriéme degré, dans lequel l'une des inconnuës ne se trouvera qu'au premier; & cela sans autre preparation que de prendre pour l'unité le parametre a de la Parabole donnée, afin de reduire sous l'expression ac les quantités connuës qui multiplient x^6, sous l'expression aad celles qui multiplient x^5, &c.

COROLLAIRE II.

416. ON prouvera de même que toute égalité du neuviéme ou du dixiéme degré se pourra toujours construire par le moyen d'une Parabole donnée, & d'un lieu du cinquiéme degré dans lequel l'une des inconnuës ne se trouvera qu'au premier degré : que les égalités de l'onziéme & du douziéme degré se construiront encore par le moyen d'une Parabole donnée, & d'un lieu du sixiéme degré; & ainsi de suite pour les autres à l'infini.

PROPOSITION X.

Problême.

417. *CONSTRUIRE l'égalité du neuviéme degré* $x^9 - bx^7 + cx^6$ &c $= 0$, *dans laquelle tous les termes se rencontrent excepté le second; par le moyen de deux lieux geometriques chacun du troisiéme degré.*

Ayant pris $x^3 = aay$ pour l'un des lieux du troisiéme degré, on substituera à la place de x^9, x^7, x^6, &c. leurs valeurs a^6y^3, a^4xyy, a^4yy, &c, & l'on aura pour l'autre lieu du troisiéme degré, en prenant a pour l'unité;

$y^3 - \frac{b}{a}xyy + cyy$ &c $= 0$ dans lequel l'inconnuë x ne peut monter qu'au second degré, puisqu'on suppose que par tout où il y a x^3 dans la proposée, on substituë à sa place aay.

Or il est visible que si l'on construit ce lieu avec la Parabole cubique, qui est le lieu de l'autre équation $x^3 = aay$; leurs points de rencontre détermineront les racines de l'égalité donnée.

COROLLAIRE.

418. TOUTE égalité du sixiéme, du huitiéme ou du neuviéme degré étant donnée, il est visible qu'après avoir fait évanoüir son second terme, & l'avoir multipliée par sa racine x lorsqu'elle est du huitiéme degré, & par son quarré xx lorsqu'elle n'est que du septiéme, on la transformera toujours en un lieu du troisiéme degré en se servant de l'équation $x^3 = aay$ dont le lieu est une Parabole cubique donnée, & faisant la substitution comme ci-dessus : de sorte que cette maniere est generale pour toutes les égalités du septiéme, du huitiéme & du neuviéme degré. On trouvera de même que toute égalité du douziéme degré dont le second terme est évanoüi, se transformera en un lieu du quatriéme, en se servant encore de l'équation $x^3 = aay$; comme aussi celles du dixiéme & du onziéme degré en les élevant au douziéme.

Mais si l'on propose une égalité du seiziéme degré dans laquelle tous les termes se rencontrent, excepté le deuxiéme, on trouvera qu'en se servant du lieu du quatriéme degré $x^4 = a^3y$, on la transformera en un lieu du cinquiéme. On trouvera de même qu'une égalité du vingtiéme degré se transformera en un lieu du sixiéme, en se servant encore du lieu du quatriéme degré $x^4 = a^3y$; comme aussi celles du dix-septiéme, dix huitiéme & dix neuviéme degré : que les égalités du vingt-cinquiéme degré dans lesquelles tous les termes se rencontrent, excepté le deuxiéme, se transformeront en un lieu du sixiéme degré, en se servant du lieu du cinquiéme $x^5 = a^4y$; comme aussi toutes les égalités du vingt-uniéme, vingt-troisiéme & vingt quatriéme degré. Et l'on peut continuer cette recherche autant qu'on voudra.

REMARQUE I.

419. IL est à propos de remarquer que si dans une égalité du seiziéme degré non seulement le second terme manquoit, mais le troisiéme & le sixiéme; le lieu du cinquiéme degré lequel joint avec celui du quatriéme $x^4 = a^3y$ sert à construire l'égalité se transformeroit en un du quatriéme, & on peut faire des remarques semblables sur les égalités des degrés plus élevés. Mais quoiqu'il soit vrai de dire qu'une égalité du seizié-

me degré dans laquelle il n'y a que le deuxiéme terme qui manque, ne se peut transformer qu'en un lieu du cinquiéme, si l'on employe à cet effet le lieu du quatriéme $x^4 = a^3y$ qui n'a que deux termes; on n'en doit pas conclure en general, que les lieux les plus simples pour resoudre une équation complette du seiziéme degré, doivent être, l'un du quatriéme & l'autre du cinquiéme. Car au contraire, il me paroît évident que si l'on se sert d'un lieu du quatriéme degré composé de plusieurs termes à la place de $x^4 = a^3y$ qui n'en a que deux, on pourra choisir ce lieu en sorte qu'il servira à transformer l'égalité complette du seiziéme degré en un autre lieu du quatriéme. En voici la raison. Si l'on prend deux lieux du quatriéme degré dans l'un desquels l'inconnuë x monte au quatriéme degré, & dans l'autre l'inconnuë y, il est constant par les regles de l'Algebre, qu'en faisant évanoüir l'inconnuë y par le moyen de ces deux équations, on arrivera à une égalité dans laquelle l'inconnuë x montera au seiziéme degré. Or comme deux lieux du quatriéme degré, peuvent avoir ensemble plus de seize termes, puisque chacun en peut avoir quinze differens, il s'ensuit qu'ils peuvent contenir toutes les quantités connuës de l'égalité donnée: ce qui suffit pour faire voir la possibilité de construire une égalité complette du seiziéme degré par deux lignes du quatriéme.

On doit de même penser que les deux lieux les plus simples pour construire une égalité complette du vingtiéme, dix-neuviéme, & dix-septiéme degré, seront, l'un du quatriéme, & l'autre du cinquiéme, parce que la reduite de ces deux lieux montera au vingtiéme degré, & qu'ils pourront contenir ensemble plus de termes que la proposée, & renfermer par consequent toutes les quantités connuës qui s'y rencontrent. Et si l'inconnuë avoit 21, 22, 23, 24, ou 25 dimensions dans l'égalité proposée, il faudroit deux lieux de cinq degrés chacun. De-là on forme la regle suivante, qui sert à trouver les degrés des deux lieux qui peuvent resoudre une égalité proposée; en sorte qu'ils soient les plus simples qu'il est possible.

Il faut extraire la racine quarrée de la plus haute dimension de l'inconnuë. Si elle est exacte, chacun des deux lieux doit avoir autant de degrés que cette racine contient d'unités; & si elle ne l'est pas, ou le reste est égal, ou moindre que la ra-

cine, & alors l'un des lieux aura pour degré le nombre de la racine, & l'autre ce même nombre augmenté de l'unité : ou le reste est plus grand que la racine, & alors chacun des deux lieux aura pour degré le nombre de la racine augmenté de l'unité.

Soit proposé, par exemple, de trouver les deux lieux les plus simples, qui peuvent resoudre une égalité, dont la plus haute dimension de l'inconnuë soit de trente sept degrés. Comme la racine quarrée de 37 est 6, & que le reste 1 est moindre que ce nombre 6, il faudra que l'un des lieux soit du sixiéme degré, & l'autre du septiéme; on trouvera la même chose, si la plus haute dimension est 38, 39, 40, 41 & 42. Mais si elle étoit 43, comme la racine quarrée de 43 est 6, & que le reste 7 est plus grand que cette racine, il faudroit deux lieux qui fussent chacun du septiéme degré; & il en est de même si la plus haute dimension étoit 44, 45, 46, 47, 48 & 49.

REMARQUE II.

420. Il arrive quelquefois qu'on peut construire une égalité donnée par le moyen d'une seule & même courbe mise en deux differentes positions; & c'est ce qu'on verra clairement dans cet exemple.

Soit proposée à construire l'égalité du neuviéme degré $x^9 + a^8 x - a^8 b = o$, dans laquelle tous les termes moyens manquent excepté le penultiéme. Je prends l'équation $x^3 = aay$, dont le lieu est une Parabole cubique *MAM* qui a pour parametre la ligne droite donnée $AB = a$, & pour appliquées des lignes droites *PM* (y) qui font avec les parties correspondantes *AP* (x) de son axe ou diametre un angle pris à volonté *APM* que je suppose ici droit; & en cubant chaque membre, j'ai $x^9 = a^6 y^3$: ce qui change par la substitution l'égalité proposée en cette équation $y^3 = aab - aax$, dont le lieu se construit ainsi.

FIG. CCXXXIII. Soit prise sur *AP* prolongée du côté de *P* la partie $AC = b$; & ayant mené par le point *C* la droite indéfinie *CK* parallele à *PM*, soit décrite une autre Parabole cubique *MCM* qui ait pour axe *CK*, & pour appliquées les droites *KM* paralleles à *AP*, & dont le parametre $CD = a$. Je dis qu'elle sera le lieu requis.

Car

Car par la conſtruction MK ou $CP = b - x$, & par la proprieté de la courbe $CK^3 = MK \times \overline{CD}^2$, c'eſt à dire en termes analytiques $y^3 = aab - aax$. Or il évident 1°. Que ſi des points M où cette derniere Parabole cubique MCM rencontre l'autre MAM, on mene des paralleles MP à CE; les parties AP exprimeront les racines x de l'égalité propoſée $x^9 + a^8 x - a^8 b = o$. 2°. Que les Paraboles cubiques MCM, MAM, ſont préciſément les mêmes ; puiſque leurs parametres AB, CD, ſont égaux, & que les angles APM, CKM, que font leurs appliquées avec leurs axes le ſont auſſi.

La ſituation des deux Paraboles cubiques MAM, MCM, fait connoître que l'égalité propoſée $x^9 + a^8 x - a^8 b = o$, n'a qu'une racine réelle AP (x), qui eſt toujours vraie & moindre que AC (b); de ſorte que les huit autres ſont imaginaires.

PROPOSITION XI.

Problême.

421. *CONSTRUIRE toute égalité de tel degré qu'elle puiſſe être, par le moyen d'une ligne droite, & d'un lieu du même degré, duquel lieu toutefois on puiſſe déterminer tous les points en n'employant que des lignes droites.*

Il faut mettre le dernier terme de l'égalité propoſée tout ſeul d'un côté en le rendant égal à tous les autres, & diviſer enſuite toute l'égalité par la ligne qui fait l'office de l'unité, repetée autant de fois qu'il ſera neceſſaire, afin que chaque terme n'exprime que des lignes : comme ſi l'on propoſoit $x^5 - bx^4 + acx^3 - aadxx + a^3ex - a^4 f = o$, on auroit $f = \frac{x^5}{a^4} - \frac{bx^4}{a^4} + \frac{cx^3}{a^3} - \frac{dxx}{aa} + \frac{ex}{a}$. Cela fait, on prendra Fig. CCXXIV. ſur une ligne droite indéfinie AB dont l'origine fixe ſoit au point A, une partie quelconque AP pour la valeur de x; & ayant mené parallelement à la ligne AC donnée de poſition une droite $PM = \frac{x^5}{a^4} - \frac{bx^4}{a^4} + \frac{cx^3}{a^3} - \frac{dxx}{aa} + \frac{ex}{a}$ (ce qui ſe peut toujours faire * en n'employant que des lignes droites), ſon extremité M ſera l'un des points d'une ligne courbe $ADEM$; dont les interſections M, M, M, &c. avec une ligne droite KM menée parallelement à AB par le point K tel

* Art. 376.

que $AK = f$, détermineront des parties KM, KM, KM, &c. qui seront les valeurs cherchées de l'inconnuë x dans l'égalité donnée.

Car menant les droites MP, MP, MP, &c. paralleles à AC, & nommant les indéterminées AP, x; PM, y; on aura par la proprieté de la courbe $ADEM$ cette équation PM $(y) = \frac{x^5}{a^4} - \frac{bx^4}{a^4} + \frac{cx^3}{a^3} - \frac{dxx}{aa} + \frac{ex}{a}$ qui est un lieu du cinquiéme degré; & par la proprieté de la droite KM cette autre $y = f$. Ce qui, en substituant pour y sa valeur f, & multipliant par a^4, donne l'égalité même proposée $x^5 - bx^4 + acx^3 - aadxx + a^3ex - a^4f = o$.

Ces sortes de constructions peuvent être tres-utiles pour trouver les limites des égalités. Supposons, par exemple, qu'on ait une methode pour déterminer sur la ligne AC les parties AF, AG, telles que les droites FD, GE, paralleles à AB touchent la courbe en des points D, E; il est clair 1°. Que si AK (f) est moindre que AF & plus grande que AG, comme on le suppose dans cette figure, l'égalité proposée aura trois racines vraies KM, KM, KM, & les deux autres imaginaires; parce que la figure de la courbe est telle que la ligne KM la rencontrera en trois points, & jamais en davantage. 2°. Que si AK (f) est moindre que AG, la ligne KM coupera la courbe en cinq points; c'est à dire que l'égalité aura cinq racines vraies. 3°. Que si AK surpasse AF, l'égalité n'aura qu'une racine vraie, & les quatre autres imaginaires. 4°. Que si $AK = AF$, l'égalité aura trois racines vraies, dont il y en aura deux égales entr'elles; sçavoir FD, FD. 5°. Et enfin que si $AK = AG$, l'égalité aura cinq racines vraies, dont il y en aura deux égales, sçavoir GE, GE.

La même ligne courbe $ADEM$ étant continuée du côté du point A, servira à trouver les racines de l'égalité $x^5 - bx^4 + acx^3 - aadxx + a^3cx + a^4f = o$, qui ne differe de la précedente qu'en ce que le dernier terme a le signe $+$; ce qui fait voir qu'on doit mener alors la droite KM au dessous de AB, puisque son lieu doit être $y = -f$.

REMARQUE.

422. On peut varier la construction précedente en differentes manieres; car au lieu du dernier terme qu'on égale à tous

les autres, on pourroit prendre tel autre des termes qu'on voudroit, ou même deux quelconques qui se suivent immediatement, & les diviser ensuite d'une maniere convenable, afin que les égalant à l'inconnuë y, le lieu de l'équation ne fût que du premier degré. Soit par exemple, l'égalité du troisiéme degré $x^3 - abx - aac = 0$; je fais $\frac{bx}{a} + c = \frac{x^3}{aa}$, & j'ai ces deux équations $x^3 = aay$, & $y = \frac{bx}{a} + c$, dont les lieux étant construits separement donneront les racines de l'égalité proposée. Voici comment.

Ayant pris à l'ordinaire pour inconnuës & indéterminées les deux droites AP (x). PM (y) qui font entr'elles un angle quelconque APM, soit décrite une premiere Parabole cubique MAM qui soit le lieu de la premiere équation $x^3 = aay$. Soit menée par le point A origine des x une ligne droite parallele à PM, sur laquelle soient prises les parties $AC = b$, $AD = c$, du côté où s'étend PM; & ayant pris sur AP prolongée du côté de A la partie $AB = a$, soit tirée par le point D une parallele indéfinie à BC. Je dis que si des points M où elle rencontre la premiere Parabole cubique MAM, on mene des paralleles MP à AC; les coupées AP seront les racines de l'égalité donnée $x^3 - abx - aac = 0$. FIG. CCXXXV.

Car menant DE parallele à AP, les triangles semblables BAC, DEM, donneront BA (a). AC (b) :: DE (x). $EM = \frac{bx}{a}$, & par consequent PM $(y) = \frac{bx}{a} + c$, Or à cause de la premiere Parabole cubique MAM: l'on aura $x^3 = aay$. Si donc l'on met à la place de y sa valeur $\frac{bx}{a} + c$, on retrouvera l'équation donnée $x^3 - abx - aac = 0$.

S'il y avoit $+ b$ dans l'égalité donnée, il faudroit prendre AC du côté opposé à PM, & il en est de même de AD lorsqu'il y a $+ c$: de sorte que cette construction est generale pour toute égalité donnée du troisiéme degré. Car il est évident qu'après en avoir fait évanoüir le deuxiéme terme, on peut toujours la reduire sous l'une de ces formes.

Il est visible qu'on peut se servir d'une Parabole cubique donnée, puisqu'il n'y a qu'à prendre l'unité arbitraire a égale à son parametre.

PROPOSITION XII.

Problême.

423. *APPROCHER de plus en plus à l'infini de la juste valeur des racines de toute égalité du troisiéme & du quatriéme degré ; & des égalités qui passent le quatriéme degré lorsqu'elles n'ont que deux termes : en ne se servant que de lignes droites & de cercles.*

Soit donnée l'égalité du troisiéme degré $x^3 \mp 2apx - aaq = 0$; je la multiplie par x pour l'élever au quatriéme & transposant le terme $aaqx$, j'ai $x^4 \mp 2apxx = aaqx$; j'ajoute de part & d'autre $aapp$ pour faire que le premier membre soit un quarré, ce qui me donne $x^4 \mp 2apxx + aapp = aapp + aaqx$, & extrayant de part & d'autre la racine quarrée, il vient $xx \mp ap = a\sqrt{pp + qx}$; transposant enfin ap, & extrayant de nouveau la racine quarrée, je trouve $x = \sqrt{\pm ap + a\sqrt{pp + qx}}$. Je considere à present que si au lieu de la juste valeur de la racine vraie x, je prends une grandeur qui l'excede, comme par exemple c ; il s'ensuit 1°. Que c surpasse $\sqrt{\pm ap + a\sqrt{pp + qc}}$. 2°. Que $\sqrt{\pm ap + a\sqrt{pp + qc}}$ sera encore plus grande que la juste valeur de x. Cette seconde proposition est visible, mais pour la premiere elle se prouve ainsi.

Si l'égalité du troisiéme degré a + $2apx$, il est clair que $c^4 + 2apcc$ * $> aaqc$, d'où il vient en ajoutant de part & d'autre le quarré $aapp$, & achevant le calcul comme ci-dessus, $c > \sqrt{-ap + a\sqrt{pp + qc}}$. Mais lorsqu'il y a $- 2apx$, on aura en transposant $2apx$ & divisant par x cette égalité $xx = 2ap + \frac{aaq}{x}$, d'où il suit que si l'on met dans $\frac{aaq}{x}$ pour x une valeur c plus grande que la racine vraie de l'égalité $x^3 - 2apx - aaq = 0$, la quantité $2ap + \frac{aaq}{c}$ sera moindre que le quarré xx (puisque $\frac{aaq}{c}$ est moindre que $\frac{aaq}{x}$) & à plus for-

* Ce signe ainsi tourné, vient dire, surpasse.

te raiſon que le quarré cc. On aura donc $cc > 2ap + \frac{aaq}{c}$, & multipliant par cc, il vient $c^4 - 2apcc > aaqc$, d'où l'on tire (en operant comme l'on vient de faire) $c > \sqrt{ap + a\sqrt{pp + qc}}$. Or ceci ſuppoſé, je forme cette ſuite : $\sqrt{\pm ap + a\sqrt{pp + qc}}$, $\sqrt{\pm ap + a\sqrt{pp + qf}}$, $\sqrt{\pm ap + a\sqrt{pp + qg}}$ &c, dans laquelle f exprime le terme $\sqrt{\pm ap + a\sqrt{pp + qc}}$ qui le precède immediatement, & de même g exprime le terme $\sqrt{\pm ap + a\sqrt{pp + qf}}$ &c.

Il eſt donc évident par ce que l'on vient de démontrer, que tous les termes de cette ſuite ſeront plus grands que la juſte valeur de la vraie racine x, & qu'ils en approchent toûjours de plus en plus. Je dis à preſent que ſi on la continuë à l'infini, le terme infinitieme (s'il eſt permis de s'exprimer ainſi) ou le dernier terme de cette ſuite, ſera preciſément égal à la valeur cherchée de l'inconnuë x. Car ſoit z ce dernier terme, il eſt certain par la nature de la ſuite qu'il approchera de plus prés de l'inconnuë x que tous les autres termes, & qu'ainſi le terme $\sqrt{\mp ap + a\sqrt{pp + qz}}$ qui le ſuivroit immédiatement, s'il n'étoit pas le dernier, ne peut être moindre que lui ; puiſque s'il étoit moindre il aprocheroit de plus prés de l'inconnuë x, & ſeroit par conſequent le dernier terme, ce qui eſt contre la ſuppoſition. Or il ne peut être plus grand, car on vient de démontrer que tous les termes de la ſuite vont en diminuant. Il faudra donc qu'il lui ſoit égal, & on aura par conſequent $z = \sqrt{\pm ap + a\sqrt{pp + qz}}$, c'eſt à dire en ôtant les incommenſurables $z^3 \pm 2apz - aaq = 0$, d'où l'on voit que $z = x$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

On prouvera par un raiſonnement ſemblable, que ſi l'on prend une grandeur c plus petite que la juſte valeur de x, tous les termes de cette ſuite iront toûjours en augmentant en ſorte que le dernier ſera préciſément égal à la valeur cherchée de x. Voici maintenant comment on peut

construire par Geometrie cette suite, en n'employant que des lignes droites & des cercles.

FIG. CCXXXVI. CCXXXVII. Ayant mené deux lignes droites indéfinies, *BD*, *CP*, qui s'entrecoupent à angles droits au point *A*, on prendra sur l'une d'elles les parties $AB = a$, $AD = p$, du même côté du point *A* lorsqu'il y a $+ 2apx$, & de part & d'autre lorsqu'il y a $- 2apx$, comme on le suppose dans ces deux figures; & sur l'autre les parties $AC = q$, $AP = c$, toûjours de part & d'autre du point *A*. Ayant décrit du diametre *CP* un demi cercle qui coupe *AD* en *E*, on prendra sur *AC* la partie *AF* égale à *AE*, & on portera sur *AD* depuis le point *D* vers le point *A* dans le premier cas, & vers le côté opposé dans le second, la partie *DG* égale à *DF*. On décrira enfin du diametre *BG* un demi cercle qui coupe *AP* en *Q*, je dis que $AQ = \sqrt{ap + a\sqrt{pp + qc}}$. Car à cause du demi-cercle *CEP* la ligne *AE* ou $AF = \sqrt{qc}$, & à cause du triangle rectangle *FAD* l'hypothenuse *FD* ou $DG = \sqrt{pp + qc}$, & par consequent $AG = p + \sqrt{pp + qc}$, & à cause du demi-cercle *BQG* la ligne $AQ = \sqrt{ap + a\sqrt{pp + qc}}$. Nommant à present *AQ*, *f*; & reïterant la même operation en se servant de *AQ* au lieu de *AP*, on trouvera $AR = \sqrt{ap + a\sqrt{pp + qf}}$, & ensuite par le moyen de *AR* que j'appelle *g*, on trouvera $AS = \sqrt{ap + a\sqrt{pp + qg}}$ en reïterant encore la même operation : de sorte que la continuant autant que l'on voudra, on trouvera des lignes *AP*, *AQ*, *AR*, *AS*, &c. qui approcheront de plus en plus à l'infini de la juste valeur de la vraie racine *x* de l'égalité proposée $x^3 - 2apx - aaq = 0$.

Il est à remarquer que l'on peut prendre d'abord pour *AP* (*c*) telle grandeur que l'on veut, car si cette grandeur se trouve plus grande que la racine *x*, les autres lignes *AQ*, *AR*, *AS*, &c. vont toûjours en diminuant ; & au contraire si *AP* est moindre que *x*, elles iront en augmentant: de sorte que la vraie racine est renfermée entre *AP* de l'une de ces deux figures & *AP* de l'autre, *AQ* &

AQ, AR & AR, AS, & AS. D'où l'on voit qu'en formant deux ſuites convergentes, dans l'une deſquelles le premier terme ſoit plus grand que la vraie racine, & dans l'autre plus petit, l'on aura toûjours en prenant les termes correſpondans de ces deux ſuites, des limites entre leſquelles ſe doit trouver cette racine; de ſorte que la difference de ces limites diminuë de plus en plus à l'infini.

Si l'on demandoit les deux autres racines de l'égalité propoſée $x^3 - 2apx - aaq = o$. Nommant m la racine approchée que l'on vient de trouver, on la regardera comme étant exacte : c'eſt pourquoi diviſant cette égalité par $x - m$, la diviſion ſe fera au juſte (car le reſte $m^3 - 2apm - aaq = o$, puiſqu'on ſuppoſe $x = m$), & on aura pour quotient l'égalité $xx + mx + mm - 2ap = o$, dont la reſolution fournira les deux racines qu'on demande.

Toutes les égalités du troiſiéme degré peuvent ſe reduire à l'un où l'autre de ces deux formes; car aprés avoir fait évanoüir le ſecond terme, s'il y avoit $+ aaq$ en mettant $- aaq$, on ne feroit que changer les racines vraies en fauſſes & les fauſſes en vraies. D'où l'on voit que les conſtructions précedentes ſuffiſent pour trouver les racines approchées de toute égalité donnée du troiſiéme degré. Paſſons maintenant au quatriéme.

Soit propoſée l'égalité du quatriéme degré $x^4 - 3apxx - aaqx + a^3r = o$, dont il faille trouver les racines approchées. Je cherche, comme l'on vient d'enſeigner, les racines approchées de l'égalité du troiſiéme degré

$$\begin{array}{l} y^3 - 3ppy + 2p^3 = o \\ \quad + 4ary + 8apr \\ \qquad\qquad - aqq \end{array}$$

où l'on doit obſerver d'écrire $- 2p^3$ lorſqu'il y a dans la propoſé $+ 3apxx$; $- 4ar$ lorſqu'il y a $+ a^3r$; & enfin $- 8apr$ lorſque les ſignes des termes $3apxx$ & a^3r ſont differens. Je regarde enſuite l'une de ces racines approchées y comme étant exacte, & ayant trouvé une ligne $v = \sqrt{ay + 2ap}$, ſçavoir $+ 2ap$ lorſqu'il y a $- 3apxx$, & $- 2ap$ lorſqu'il y a $+ 3apxx$; j'ai pour les quatre racines approchées de la propoſée, celles de ces deux égalités du ſecond degré $xx - vx$

$+ \frac{ay \mp ap}{2} - \frac{aaq}{2v} = o$ & $xx + vx + \frac{ay \mp ap}{2} + \frac{aaq}{2v} = o$ (en observant de prendre — *ap* lorſqu'il y a — $3apxx$ dans l'égalité propoſée, & + *ap* lorſque c'eſt + $3apxx$) que l'on conſtruira aiſément en n'employant que des cercles & des lignes droites. Tout ceci n'eſt qu'une ſuite de la regle que donne M. Deſcartes dans le troiſiéme Livre de ſa Geometrie pour reduire toute égalité du quatriéme degré à une du troiſiéme, de laquelle connoiſſant une des racines, on a les quatre de la propoſée; & comme cela dépend de l'Algebre pure, je pourrois le ſuppoſer ici comme démontré. En voici cependant la raiſon en peu de mots.

On regarde l'égalité du quatriéme degré $x^4 - 3apxx - aaqx - a^3r = o$, comme le produit des deux planes $xx - vx + ab - ac = o$ & $xx + vx + ab + ac = o$, dans leſquelles les lettres v, a, b, c, marquent des inconnuës qui doivent être déterminées dans la ſuite, en ſorte que le produit de ces deux égalités qui eſt $x^4 \begin{smallmatrix} -vvxx \\ +2abxx \end{smallmatrix} - 2acvx \begin{smallmatrix} +aabb \\ -aacc \end{smallmatrix} = o$, ſoit en effet l'égalité même propoſée. Pour cela j'en compare les termes correſpondans, & j'ai 1°. $c = \frac{aq}{2v}$ 2°. $b = \frac{vv - 3ap}{2a}$. 3°. $bb - cc = -ar$, ou $bb - cc + ar = o$; c'eſt à dire en mettant pour b & pour c les valeurs que l'on vient de trouver & ordonnant, l'égalité $v^6 - 6apv^4 \begin{smallmatrix} +9aappvv \\ +4a^3rvv \end{smallmatrix} - a^4qq = o$. Et ſi l'on fait $vv = ay + 2ap$, on trouvera par la ſubſtitution l'égalité du troiſiéme degré

$\begin{matrix} y^3 - 3ppy + 2p^3 \\ + 4ary + 8apr \\ - aqq \end{matrix} = o$, de laquelle connoiſſant une racine y, on aura, en prenant la racine quarrée de $ay + 2ap$, la valeur de v, & enſuite celles de b & de c, leſquelles étant miſes dans les deux égalités planes que l'on a ſuppoſées d'abord, on en formera deux autres dont le produit ſera l'égalité même propoſée, & dont la reſolution par conſequent fournira les quatre racines qu'on demande. S'il n'étoit queſtion que de trouver une racine vraie d'une égalité du quatriéme degré, on pourroit la trouver immédiatement par une ſuite en cette ſorte.

Soit $x^4 \pm 2apxx - aaqx - a^3r = o$, on trouvera en operant

operant de même que pour le troisiéme degré $x = \sqrt{\mp ap + a\sqrt{qx + pp + ar}}$, ce qui donne, en faisant pour abreger $pp + ar = nn$, cette suite convergente c, $\sqrt{\mp ap + a\sqrt{nn + qc}}$, $\sqrt{\mp ap + a\sqrt{nn + qf}}$, $\sqrt{\mp ap + a\sqrt{nn + qg}}$, &c, dont la construction n'est differente des précedentes qu'en ce qu'il faut prendre $AF = n$ & $DG = FE$.

Si l'on avoit $x^4 \pm 2apxx - aaqx + a^3r = 0$, on trouveroit $x \sqrt{\mp ap + a\sqrt{qx + pp - ar}}$, & on formeroit lorsque pp surpasse ar (en faisant $pp - ar = nn$) la même suite convergente que ci-dessus. Mais il est à remarquer que lorsqu'il y a $+ 2apxx$ dans l'égalité donnée, il faut que $\sqrt{qx + pp - ar}$ surpasse p afin que $\sqrt{-ap + a\sqrt{qx + pp - ar}}$ valeur de la racine x ne renferme point de contradiction; ce qui donne $x > \frac{ar}{q}$, & par consequent il faudra prendre c plus grande que $\frac{ar}{q}$.

Si pp est moindre que ar, l'on formera alors, en faisant $ar - pp = qn$, cette suite convergente c, $\sqrt{\mp ap + a\sqrt{qc - qn}}$, $\sqrt{\mp ap + a\sqrt{qf - qn}}$, $\sqrt{\mp ap + a\sqrt{qg - qn}}$, &c, l'on doit remarquer que lorsqu'il y a $- 2apxx$ dans l'égalité donnée, il faut que x surpasse n ou $\frac{ar - pp}{q}$ afin que $\sqrt{ap + a\sqrt{qx + pp - ar}}$ valeur de x ne renferme point de contradiction, & qu'ainsi on doit prendre c plus grand que n.

Il peut arriver lorsqu'il y a $+ \bar{r}$ dans l'égalité donnée que ces racines soient toutes quatre imaginaires, & alors on tombera infailliblement dans quelque contradiction en construisant la suite; car on n'a demontré qu'elle est convergente qu'en supposant qu'il y eut une racine vraie dans l'égalité donnée. Au reste la construction de la derniere suite est un peu differente des autres, mais comme elle n'est pas plus difficile, je ne m'y arrêterai pas.

Cette methode devient embarrassée lorsqu'on la veut étendre à des égalités complettes qui passent le quatriéme degré; c'est pourquoi je me contenterai de l'appliquer à une égalité du cinquiéme degré qui n'a que deux termes, & qui servira de methode pour les autres plus composées qui n'ont pareillement que deux termes.

Soit $x^5 - a^4 b = 0$; multipliant par x, & transposant il vient $x^6 = a^4 bx$, & extrayant la racine quarree on aura $x^3 = aa \sqrt{bx}$ ou $x^4 = aax \sqrt{bx}$, & extrayant de nouveau deux fois de suite la racine quarrée, on trouvera enfin $x = \sqrt{a \sqrt{x \sqrt{bx}}}$; ce qui fournit cette suite convergente, c, $\sqrt{a \sqrt{c \sqrt{bc}}}$, $\sqrt{a \sqrt{f \sqrt{bf}}}$, $\sqrt{a \sqrt{g \sqrt{bg}}}$, &c, dont voici la construction geometrique.

Fig. CCXXXVIII. Ayant mené deux lignes droites indéfinies BD, CP, qui s'entrecoupent à angles droits au point A, on prendra sur l'une d'elles la partie $AB = a$, & sur l'autre, les parties $AC = b$, $AP = c$, de part & d'autre du point A. Du diametre PC ayant décrit un demi-cercle qui coupe BA prolongée du côté de A en D, & ayant pris sur AC la partie $AF = AD$, on décrira du diametre PF un autre demi-cercle qui coupe AD en E. On décrira enfin du diametre BE un troisiéme demicercle qui coupe AP en Q; il est visible que $AQ = \sqrt{a \sqrt{c \sqrt{bc}}}$. Nommant à present AQ, f; & réiterant la même operation en se servant de AQ au lieu de AP, on trouvera $AR = \sqrt{a \sqrt{f \sqrt{bf}}}$, & de même $AS = \sqrt{a \sqrt{g \sqrt{bg}}}$. Et les droites AP, AQ, AR, &c. approcheront de plus en plus à l'infini de la juste valeur de l'inconnuë x de l'égalité donnée $x^5 - a^4 b = 0$. Cela se prouve de la même maniere que pour les égalités du troisiéme degré.

M. Bernoulli celebre Professeur des Mathematiques à Bâle, est l'Auteur de ces suites. On peut voir ce qu'il en dit dans les Actes de Leipsic de l'année 1689. page 455.

PROPOSITION XIII.

Problême.

424. *UNE portion de Section conique étant donnée, trouver par son moyen les racines d'une égalité donnée du troisiéme ou du quatriéme degré.*

On a vu dans le Problême précedent qu'une égalité du quatriéme degré étant donnée, on en peut toûjours trouver une du troisiéme, de laquelle connoissant une racine on a les quatre de la proposée; en ne se servant que de lignes droites, & de cercles. On sçait de plus que toute égalité du troisiéme degré se peut reduire sous cette forme $x^3 \mp 2apx - aaq = o$, dont l'une des racines est vraie, & les deux autres ou fausses ou imaginaires. Cela posé; soit $x^3 \mp 2apx - aaq = o$, dont il faille trouver les racines, par le moyen de la portion donnée *BD* d'une Parabole qui a pour axe la ligne *CH* dont l'origine est au point *C*. Des points *B*, *D*, extremités de la portion donnée ayant mené les perpendiculaires *BG*, *DH*, sur l'axe, il est manifeste que si la vraie racine étoit plus grande que *BG*, & moindre que *DH*, le cercle décrit du centre *E*, trouvé comme l'on a enseigné à la fin de l'article 387. pour les égalités qui n'ont point de second terme, & du rayon *EC*, couperoit infailliblement la portion *BD* en quelque point *M*; d'où menant la perpendiculaire *MQ* sur l'axe, cette ligne *MQ* en seroit la vraie racine. Il est donc question lorsque ce cercle ne coupe point la portion *BD*, de transformer cette égalité en une autre dont la vraie racine soit renfermée entre les limites *BG*, *DH*. Pour le faire, je nomme les données *BG*, f; *DH*, g; & je suppose que l'on ait deux limites m, n, entre lesquelles la vraie racine x soit resserrée (m est moindre que n, & f moindre que g). Ce qui donne x plus grand que m & moindre que n, & multipliant chaque terme par f & divisant par m, il vient $\frac{fx}{m}$ plus grand que f & moindre que $\frac{fn}{m}$. Si l'on fait à present $z = \frac{fx}{m}$, & qu'on mette dans l'égalité $x^3 \mp 2apx - aaq = o$, à la place de x sa valeur $\frac{mz}{f}$, on la transformera en celle-ci $z^3 \mp \frac{2apffz}{mm} - \frac{aaqf^3}{m^3} = o$, qui aura sa vraie racine $z = \frac{fx}{m}$ plus grande que f & moindre que $\frac{fn}{m}$. D'où il suit que si les limites m, n, étoient telles

Fig. CCXXXIX.

que $\frac{fn}{m}$ fût égale ou moindre que g, il n'y auroit qu'à construire cette derniere égalité selon l'article 387. pour avoir sa vraie racine MQ (z) par le moyen de la portion donnée BD. De-là on tire la construction suivante.

On fera par le Problême précedent deux suites convergentes qui approcheront l'une en dessus & l'autre en dessous de la vraie racine x de l'égalité donnée $x^3 \mp 2apx - aaq = o$. On choisira deux termes correspondans dans ces deux suites m, n, qui soient tels que $\frac{fn}{m}$ soit égale ou moindre que g: ce qui se pourra toujours faire, puisque f est moindre que g, & que la difference qui est entre m & n diminuë continuellement à l'infini. Cela fait, on transformera l'égalité donnée en une autre $z^3 \mp \frac{2apffz}{mm} - \frac{aaqf^3}{m^3} = o$, dont l'inconnuë sera $z = \frac{fx}{m}$; & en la construisant selon la fin de l'article 387. le cercle coupera infailliblement la portion donnée BD en un point M; duquel ayant mené sur l'axe la perpendiculaire MQ, elle sera la vraie racine z de cette seconde égalité: & faisant ensuite $x = \frac{mz}{f}$, cette ligne x sera la vraie racine de l'égalité $x^3 \mp 2apx - aaq = o$.

Si l'on veut trouver les deux autres racines de cette égalité lorsqu'elles ne sont pas imaginaires; il n'y a qu'à la diviser par l'inconnuë x moins celle que l'on vient de découvrir pour l'abaisser à une du second degré, dont on découvrira les deux racines par le moyen d'un cercle, en se servant de l'article 380.

Tout ceci est trop évident pour m'y arrêter davantage, je remarquerai seulement que si la portion donnée BD étoit d'une Ellipse ou d'une Hyperbole, il faudroit se servir de l'article 398. ou 403. & que toute la difficulté se reduiroit à transformer l'égalité donnée en une autre, dont la vraie racine eut des limites données: & c'est ce que l'on feroit comme dans la Parabole.



LIVRE DIXIÉME.

Des Problêmes déterminés.

PROPOSITION GENERALE.

425. *N Problême de Geometrie déterminé étant proposé, en trouver la solution.*

On regardera d'abord le Problême proposé comme s'il étoit resolu, & on tirera les lignes que l'on jugera les plus propres pour faire connoître ce qui n'est que supposé. On nommera ensuite toutes ces lignes (qui sont pour l'ordinaire des triangles rectangles ou semblables) par des lettres de l'Alphabet, sçavoir les lignes qui sont connuës par les premieres lettres, & les lignes inconnuës par les dernieres lettres; & on parcourra toutes les conditions du Problême, en comparant ces lignes entr'elles dans l'ordre le plus simple & le plus naturel qu'il sera possible: ce qui doit servir à former autant de differentes égalités qu'il y a d'inconnuës. On employera enfin les regles ordinaires de l'Algebre pour reduire ces differentes égalités à une seule dans laquelle il ne se trouve plus qu'une inconnuë, & pour l'abaisser s'il se peut à un moindre degré; & l'ayant resoluë par les regles prescrites dans le Livre precedent, on en tirera la solution cherchée du Problême. Ceci s'éclaircira parfaitement par les exemples qui suivent.

EXEMPLE I.

426. LA ligne droite *AB* étant donnée, trouver hors de cette ligne le point *C* tel qu'ayant mené les droites *AC*, *CB*; 1°. La somme de leurs quarrés soit au triangle *ACB* en la raison FIG CCXL.

donnée de f à g, 2°. L'angle ACB qu'elles comprennent soit égal à l'angle donné GDK.

Je suppose que le point C soit celui qu'on cherche, & je mene CH perpendiculaire sur AB que je divise par le milieu au point E. Je nomme la donnée AE ou EB, a; & les inconnuës EH, x; HC, y; & j'ai $AH = a - x$, $BH = a + x$. Donc à cause des triangles rectangles AHC, BHC, les quarrés des hypothenuses $\overline{AC}^2 = aa - 2ax + xx + yy$, & $\overline{BC}^2 = aa + 2ax + xx + yy$; & par consequent $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = 2aa + 2xx + 2yy$. Or puisque le triangle $ACB = AE \times CH$ (ay), il s'ensuit par la premiere condition du Problême que $2aa + 2xx + 2yy . ay :: f . g$; ce qui donne en multipliant les extrêmes & les moyens, & divisant par $2g$, cette équation $aa + xx + yy = \frac{af}{2g}y = 2my$ en prenant (pour ôter les fractions) une ligne $m = \frac{af}{4g}$.

Il reste maintenant à accomplir la seconde condition, sçavoir que l'angle ACB soit égal à l'angle donné GDK. Pour y réüssir, je mene d'un point G pris à discretion dans la droite GD, la perpendiculaire GF sur le côté DK, prolongé, s'il est necessaire, & du point A la perpendiculaire AL sur le côté BC prolongé aussi, s'il est necessaire, afin d'avoir deux triangles rectangles semblables ACL, GDF, dont l'un GDF est donné. Cela fait, je nomme les données DF, b; FG, c; & faisant, pour abreger, $BC = n$, je trouve à cause des triangles rectangles semblables BCH, BAL, ces proportions $BC\,(n) . CH\,(y) :: BA\,(2a) . AL = \frac{2ay}{n}$. Et $BC\,(n) . BH\,(a + x) :: BA\,(2a) . BL = \frac{2aa + 2ax}{n}$. Et par consequent CL ou $BL - BC = \frac{2aa + 2ax - nn}{n}$. Donc puisque l'angle ACL doit être égal à l'angle GDF, il faut que $CL\,(\frac{2aa + 2ax - nn}{n}) . AL\,(\frac{2ay}{n}) :: DF\,(b) . FG\,(c)$; d'où l'on tire en multipliant les extrêmes & les moyens $2aac + 2acx - cnn = 2aby$, c'est à dire, en mettant pour nn sa valeur $aa + 2ax + xx + yy$, cette seconde équation $aac - cxx - cyy = 2aby$ qui renferme la seconde condition du Problême.

Comme l'on a trouvé autant d'égalités qu'il y avoit d'inconnuës, & que l'on a satisfait à toutes les conditions du Problême; il ne faut plus que se servir des regles ordinaires de l'Algebre, pour reduire ces égalités à une seule qui ne renfer-

me qu'une inconnuë y ou x : & c'eſt ce qu'on peut faire en cette ſorte. J'ai pour premiere équation $aa + xx + yy = 2my$, & pour ſeconde, $aac - cxx - cyy = 2aby$ ou $aa - xx - yy = \frac{2aby}{c}$; c'eſt pourquoi ajoutant enſemble d'une part les deux premiers membres, & de l'autre les deux ſeconds, je trouve $2aa = \frac{2aby}{c} + 2my$, d'où je tire $y = \frac{aa}{m+f}$ en prenant $f = \frac{ab}{c}$. Et mettant cette valeur à la place de y & ſon quarré à la place de yy dans l'une ou l'autre des équations precedentes, je trouve $xx = \frac{aamm - aaff - a^4}{mm + 2mf + ff}$ & $x = \frac{a\sqrt{mm - ff - aa}}{m+f}$; d'où je connois que ſi mm étoit moindre que $aa + ff$ le Problême feroit impoſſible. En voici la conſtruction.

Par le point E milieu de AB ayant tiré une perpendiculaire indéfinie ON à AB, on menera par le point A la ligne AM qui faſſe avec AB l'angle EAM égal à l'angle DGF qui eſt donné. Du point M où cette ligne rencontre la perpendiculaire ON, comme centre, & du rayon MA, on décrira un arc de cercle ACB. On prendra enſuite ſur EM prolongée du côté de M la partie $MN = m$; & ayant joint NA, on lui menera la perpendiculaire AO qui rencontre NO au point O, par lequel on tirera une parallele à AB. Je dis que cette parallele rencontrera l'arc de cercle ACB au point cherché C. FIG. CCXLI.

Car ayant mené CH perpendiculaire ſur AB, il eſt clair que $CH = EO = \frac{aa}{m+f}$, puiſqu'à cauſe des triangles rectangles ſemblables NEA, AEO, il vient NE $(m+f)$. AE (a) :: AE (a). $EO = \frac{aa}{m+f}$. De plus à cauſe du cercle $\overline{CM}^2 = \overline{AM}^2 = aa + ff$; & partant puiſque $MO = f + \frac{aa}{m+f}$, il s'enſuit à cauſe du triangle rectangle MCO que $\overline{CO}^2$ ou $\overline{EH}^2$ $(xx) = aa + ff - ff - \frac{2aaf}{m+f} - \frac{a^4}{mm + 2mf + ff} = \frac{aamm - aaff - a^4}{mm + 2mf + ff}$. Donc &c.

REMARQUE.

427. LORSQU'APRE'S avoir ſatisfait à toutes les queſtions d'un Problême, on eſt arrivé à deux équations qui renferment chacune les deux mêmes inconnuës, il n'eſt pas neceſſaire, ſi l'on veut, de les reduire à une ſeule qui ne renferme plus qu'une inconnuë, comme il eſt preſcrit dans la propoſition generale : mais l'on peut reſoudre le Problême, en conſtruiſant ſeparément les lieux de ces deux équations, car leurs

points d'interſection ſerviront à trouver les valeurs de ces deux inconnuës. C'eſt ce qui ſe voit clairement dans cet exemple, où l'on a pris pour inconnuës les droites *EH* (x), *HC* (y) qui font entr'elles un angle droit *EHC*: & où après avoir ſatisfait aux conditions requiſes, on eſt arrivé à ces deux équations $aa + xx + yy = 2my$, & $aa - xx - yy = 2fy$; car les cercles qui en ſont les lieux étant décrit ſéparément donneront par leurs interſections des points qui ſatisferont : voici comment.

Art. 322. Ayant décrit comme dans la premiere conſtruction l'arc de cercle *ACB*, on décrira du centre *A*, & du rayon $AP = m$, un arc de cercle qui coupe la perpendiculaire *EM* en *P*. On prendra ſur cette perpendiculaire la partie $EQ = m$ du côté de l'arc *ACB*, & on décrira du centre *Q* & du rayon $QC = EP$, un cercle qui coupera l'arc *ACB* en des points *C* qui ſatisferont.

Car à cauſe de ce dernier cercle on aura $\overline{QC}^2$ ou $\overline{EP}^2$ $(mm - aa) = \overline{QO}^2$ $(mm - 2my + yy) + \overline{OC}^2$ (xx), c'eſt à dire la premiere équation $aa + xx + yy = 2my$; & à cauſe de l'autre cercle *ACB* il vient $\overline{MC}^2$ ou $\overline{MA}^2$ $(ff + aa) = \overline{MO}^2$ $(ff + 2fy + yy) + \overline{OC}^2$ (xx), c'eſt à dire la ſeconde équation $aa - xx - yy = 2fy$. D'où il ſuit que le point cherché *C* ſe doit trouver en même temps ſur ces deux cercles, c'eſt à dire, qu'il doit ſe confondre avec leurs points d'interſection.

Il eſt viſible qu'il y a deux differens points *C* qui ſatisfont à la queſtion, lorſque ces deux cercles ſe coupent en deux points comme dans cette figure; qu'il n'y en a qu'un, lorſqu'ils ſe touchent; & qu'enfin il n'y en peut avoir aucun, lorſqu'ils ne ſe coupent ni ne ſe touchent.

Il faut bien prendre garde qu'en reſolvant un Problême par le moyen de deux lieux, on ne tombe pas dans une conſtruction plus compoſée, que ſi étant arrivé à une ſeule égalité qui ne renferme qu'une inconnuë x, on l'eut conſtruite ſelon les regles du Livre precedent. Je m'explique : qu'il faille, par exemple, reſoudre un Problême (c'eſt le troiſiéme exemple qui ſera propoſé) dont les conditions ſoient renfermées dans ces deux équations $y = \frac{cd - cx}{e}$, & $\frac{bb}{gg} yy = aa + xx$;

$+ xx$; si l'on se servoit des lieux de ces deux équations, il est clair qu'il faudroit mener une ligne droite * qui seroit le lieu de la premiere équation, & décrire une Hyperbole * qui seroit le lieu de la seconde, pour avoir par leurs intersections les valeurs des deux inconnuës x & y. Mais parce qu'en réüniſſant ces deux équations en une seule, on trouve l'égalité du second degré $xx - \frac{2ccd}{cc - ff}x + \frac{ccdd - aaff}{cc - ff} = o$, qui se construit en n'employant que des lignes droites & des cercles; ce seroit une faute considerable de se servir d'une Hyperbole. * Art. 306. * Art. 330. & 332.

EXEMPLE II.

428. Le quarré $ABCD$ étant donné; il faut mener d'un de ses angles A la ligne droite AE, en sorte que sa partie FE comprise entre les côtés BC, CD, opposés à cet angle soit égale à une ligne donnée b. Fig. CCXLII.

Je suppose que le point E pris sur le côté DC prolongé, soit tel que la partie FE de la ligne AE soit égale à b, c'est à dire que je suppose la question resoluë; & je nomme la donnée AB ou AD ou DC ou CB, a; l'inconnuë DE, x. Cela fait, les triangles semblables EDA, ECF, donnent $ED\ (x) . DA\ (a) :: EC\ (x - a) . CF = \frac{ax - aa}{x}$, & le triangle rectangle ECF donne $\overline{FE}^2 = \overline{EC}^2 + \overline{CF}^2 = xx - 2ax + aa + \frac{aaxx - 2a^3x + a^4}{xx}$. Mais puiſque par la condition du Problême FE doit être égale à b, on aura $xx - 2ax + aa + \frac{aaxx - 2a^3x + a^4}{xx} = bb$, ou $x^4 - 2ax^3 + 2aaxx - bbxx - 2a^3x + a^4 = o$. D'où l'on voit que la resolution de cette égalité doit fournir pour $DE\ (x)$, une valeur telle que menant la droite AE, sa partie FE comprise entre les côtés CB, DC, soit égale à la donnée b.

L'égalité que l'on vient de trouver étant du quatriéme degré, il faudroit employer pour la resoudre une Section Conique. C'est pourquoi je dois chercher auparavant par les regles que fournit l'Algebre, si elle ne se peut point abaisser à un degré plus simple, & je trouve en effet que si l'on prend $cc = aa + bb$, elle sera le produit des deux égalités $xx + aa - ax - cx = o$, & $xx + aa - ax + cx = o$, qui sont chacune du second degré, de sorte que pour avoir les quatre racines de l'égalité du quatriéme degré $x^4 - 2a^3x$ &c, il ne faut que trouver les racines de chacune de ces deux égalités. Je ne m'arrête point à

chercher les racines de l'égalité $xx + aa - ax + cx = o$; parce que c ſurpaſſant a, la diſpoſition des ſignes me fait connoître qu'elles ſont toutes deux fauſſes : mais je trouve celles de l'autre égalité $xx + aa - ax - cx = o$, que je connois être toutes deux vraies, de la maniere qui ſuit.

Soit priſe ſur le côté AB prolongé la partie $BG = c$, & ſoit décrit du diametre AG un demi-cercle qui coupe en E le côté DC prolongé. Je dis que ce point ſera celui qu'on cherche.

Car nommant DE, x; & menant la perpendiculaire EH, on aura $HG = a + c - x$, & par la proprieté du cercle $AH \times HG\,(ax + cx - xx) = \overline{EH}^2\,(aa)$.

REMARQUE I.

429. LORSQU'APRE'S avoir ſatisfait aux conditions d'un Problême, on arrive à une égalité compoſée qui a pluſieurs racines réelles, il eſt viſible qu'il n'y a qu'une de ces racines qui exprime la valeur de l'inconnuë qu'on cherche : mais on doit bien remarquer que les autres peuvent auſſi ſervir à la reſolution de la queſtion, dans un ſens qui ne peut être different de celui qu'on s'eſt imaginé que dans quelques circonſtances particulieres. Ainſi dans cet exemple la petite racine vraie DL (x) de l'égalité $xx - ax - cx + aa = o$, donne ſur le côté DC un point L tel qu'ayant mené la droite AL qui rencontre le côté BC prolongé en K, ſa partie LK eſt égale à la donnée b. De même ſi l'on prend $Bg = c$ ſur le côté BA prolongé vers A, & qu'on décrive du diametre Ag un demi-cercle, il coupera le côté CD prolongé vers D aux points e, l, en ſorte que De, & Dl, ſeront les deux racines fauſſes de l'égalité $xx + cx - ax + aa = o$: & ſi l'on mene les droites Ae, Al, qui rencontrent le côté CB prolongé aux points f, k; les droites ef, lk, ſeront encore chacune égale à la donnée b. De-là on peut voir que quoiqu'en reſolvant le Problême on n'ait eu en vûë que de trouver la valeur de DE, on eſt cependant arrivé à une égalité dont les racines ont fourni d'autres valeurs DL, De, Dl, qui ont toutes ſervi à reſoudre le Problême en quelque ſens.

REMARQUE II.

430. S'IL y a lieu de croire que l'égalité qui renferme les conditions d'un Problême se peut abaisser à un moindre degré, il est à propos de tenter d'autres voies que celles qu'on a suivies quand même elles paroîtroient moins naturelles; parce qu'il arrive souvent qu'elles conduisent à des égalités plus simples, & que d'ailleurs il est assez difficile d'abaisser des égalités composées. Voici deux autres manieres de resoudre le Problême précedent qui pourront servir à faire comprendre cette remarque.

Ayant supposé le Problême resolu, je mené EG perpendiculaire sur AE qui rencontre le côté AB prolongé en G, & je prends pour inconnuës les deux droites AF & BG que je nomme y & z. Cela fait, les triangles rectangles semblables ABF, AEG, donnent $AB\ (a).\ AF\ (y) :: AE\ (y+b).\ AG\ (a+z)$. Et partant $yy+by = aa+az$. Or comme j'ai deux inconnuës & que le Problême est déterminé, il faut encore chercher une autre égalité. Pour la trouver, je considere que $EG = AF\ (y)$; car menant EH perpendiculaire sur AG, le triangle rectangle EHG est semblable au triangle rectangle ABF, & de plus égal, puisque les côtés homologues AB, EH, sont égaux entr'eux. J'aurai donc (à cause du triangle rectangle AEG) cette autre égalité $aa+2az+zz = yy+2by+bb+yy = 2yy+2by+bb$, dans laquelle mettant à la place de $2yy+2by$ sa valeur $2aa+2az$ trouvée par le moyen de la premiere égalité, il vient $aa+2az+zz = 2aa+2az+bb$ qui se réduit à cette égalité très-simple $z = \sqrt{aa+bb}$, qui fournit d'abord la même construction que ci-dessus. Fig. CCXLII.

AUTRE MANIERE.

La maniere suivante a cela de particulier qu'elle réüssit également soit que la figure $ABCD$ soit un quarré, ou qu'elle soit un rhombe. Ayant mené par le point cherché F, que je regarde comme donné, la ligne FG qui fasse avec AF l'angle AFG égal à l'angle donné ACE & qui rencontre au point G la diagonale AC prolongée autant qu'il est necessaire; on aura trois triangles ACE, AFG, GCF, qui seront semblables en- Fig. CCXLIII.

tr'eux. Car 1°. L'angle en A étant commun aux deux triangles ACE, AFG, & les angles ACE, AFG, étant égaux par la ſuppoſition ; il eſt viſible que ces deux triangles ſeront ſemblables. 2°. Le triangle ADC étant iſoſcelle, l'angle DCA ou ECG ſera égal à l'angle DAC ou ACF, & ajoutant de part & d'autre le même angle FCE, l'angle FCG ſera égal à l'angle ACE ou AFG ; & partant puiſque l'angle en G eſt commun, les deux triangles AGF, FGC, ſeront ſemblables. Cela poſé, ſoient les inconnuës $CE = x$, $AG = z$, & les données $DC = a$, $FE = b$, $AC = c$; on aura (à cauſe des paralleles AD, CF,) cette proportion: $CE (x) . FE (b) :: CD (a) . AF = \frac{ab}{x}$. Or à cauſe des triangles ſemblables ACE, AFG, GCF, on trouvera $AC (c) . CE (x) :: AF (\frac{ab}{x}) . FG = \frac{ab}{c}$. Et $AG (z) . FG (\frac{ab}{c}) :: \frac{ab}{c} . CG (z - c)$. D'où l'on forme en multipliant les extrêmes & les moyens, l'égalité $zz - cz = \frac{aabb}{cc}$ qui fournit cette conſtruction.

FIG. CCXLIII. Ayant mené du point A perpendiculairement ſur AC la ligne $AH = \frac{ab}{c}$, on tirera par le point du milieu L de la diagonale AC la ligne HL, & on prendra ſur cette diagonale prolongée du côté de C la partie LG égale à LH. On décrira enſuite du centre G & du rayon GF égal à AH, un arc de cercle qui coupera le côté BC au point cherché F. Cela eſt évident ; puiſque par la conſtruction $zz - cz = \frac{aabb}{cc}$, & que $GF = \frac{ab}{c}$.

EXEMPLE III.

431. TROUVER ſur une ligne droite indéfinie DE donnée de poſition, deux points D, E; deſquels ayant mené à deux points donnés O, C, hors de cette ligne, les droites DO, OE, DC, CE; l'angle DOE ſoit droit & l'angle DCE égal à un angle donné TPS.

FIG. CCXLIV.

Suppoſons la choſe faite, je décris du diametre DE un demi-cercle qui paſſera par le point O, puiſque l'angle DOE eſt droit ; & ſur la corde DE je décris un arc de cercle capable de l'angle donné, lequel paſſera par conſequent par le point C. Du point H centre de cet arc, & des points donnés O, C, je mene ſur DE les perpendiculaires HK, OA, CB, & je nomme les données OA, a; CB, b; AB, c; les inconnuës AK, x; KH, y. Cela poſé, il eſt clair par les Elemens de Geometrie, 1°. Que le point K ſera le milieu

de la ligne DE, & par consequent le centre du demi-cercle DOE. 2°. Que si par le sommet P de l'angle donné TPS on mene une perpendiculaire PQ à l'un des côtés PT, l'angle QPS qu'elle fait avec l'autre côté PS, sera égal à l'angle KEH. Or à cause du triangle rectangle KAO le quarré $\overline{KO}^2$ ou $\overline{KE}^2 = aa + xx$, & à cause du triangle rectangle HKE le quarré $\overline{HE}^2 = aa + xx + yy$: mais prolongeant HK jusqu'à ce qu'elle rencontre en R une parallele CR à DE, on aura (à cause du triangle rectangle CRH) le quarré $\overline{CH}^2 = bb + 2by + yy + cc + 2cx + xx$. Donc puisque les lignes HE, HC, sont rayons du même cercle, on formera par la comparaison de leurs valeurs analytiques cette équation $aa + xx + yy = bb + 2by + yy + cc + 2cx + xx$, qui, en effaçant de part & d'autre $yy + xx$, & pour abreger, faisant $\frac{aa - bb - cc}{2c} = d$, se reduit à celle-ci ; $y = \frac{cd - cx}{b}$.

Si l'on considere le chemin qu'on a suivi pour arriver à l'équation précedente, on verra qu'elle renferme cette condition, sçavoir que les cercles décrits des centres K, H, & des rayons KO, HC, se rencontrent sur la ligne DE dans les mêmes points D, E; de sorte qu'il ne reste plus qu'à faire que l'angle KEH soit égal à l'angle QPS. Pour en venir à bout.

Ayant pris sur la ligne PQ la partie PQ égale à CB, & tiré QS parallele au côté PT, & terminé en S par l'autre côté PS; il est évident que le triangle rectangle EKH doit être semblable au triangle rectangle PQS, & qu'ainsi, en nommant la donnée QS, f, on aura cette proportion; EK $(\sqrt{aa + xx})$. KH (y) :: PQ (b). QS (f); d'où l'on tire $y = \frac{f}{b}\sqrt{aa + xx} = \frac{cd - cx}{b}$. Quarrant chaque membre pour ôter les incommensurables, & mettant par ordre l'égalité, on trouve $xx - \frac{2ccd}{cc - ff}x + \frac{ccdd - aaff}{cc - ff} = 0$, dont l'une des racines fournira pour AK (x) une valeur telle que décrivant un cercle du centre K & du rayon KO, il coupera la ligne DE aux deux points cherchés D, E.

On peut trouver les racines de cette égalité, selon les articles 380. ou 382. (Liv. préced.) : mais quoique les methodes qu'on y explique soient trés-simples eû égard à leur generalité, il arrive neanmoins trés souvent qu'en conside-

rant avec attention la nature d'une queſtion particuliere, on trouve des conſtructions plus faciles. Par exemple; on peut remarquer ici, 1°. Que ſi par le point de milieu *F* de la ligne *OC* qui joint les deux points donnés, on mene la perpendiculaire *FG* qui rencontre en *G* la ligne *DE* donnée de poſition, on aura $AG = d$; car nommant *AG*, z; les triangles rectangles *GAO*, *GBC*, donneront $\overline{GO}^2 = zz + aa$ & $\overline{GC}^2 = zz + 2cz + cc + bb$, & comparant enſemble ces deux valeurs qui doivent être égales entr'elles, puiſque le point *G* eſt dans la perpendiculaire *FG* qui diviſe par le milieu la ligne *OC*, il vient $zz + aa = zz + 2cz + cc + bb$, d'où l'on tire *AG* ($z$) $= \frac{aa-bb-cc}{2c} = d$. 2°. Que l'égalité $f\sqrt{aa+xx} = cd - cx$ qui renferme les conditions du Problême, ſe reduit à cette proportion; *GK* $(d-x)$. *KO* $(\sqrt{aa+xx})$ :: *QS* (f). *AB*

* *Art.* 350. (c): de ſorte que ſi l'on décrit * le lieu de tous les points *K* tels qu'ayant mené aux deux points donnés *G*, *O*, les droites *KG*, *KO*, elles ſoient toujours entr'elles en la raiſon donnée de *QS* à *AB*; ce lieu coupera la ligne *DE* au point cherché *K*. Ce qui donne la conſtruction ſuivante qui eſt trés ſimple.

Par le point de milieu *F* de la ligne *OC* qui joint les deux points donnés ayant mené la perpendiculaire *FG*, qui rencontre en *G* la ligne *DE* donnée de poſition, on diviſera la ligne *OG* au point *M*, en ſorte que *GM*. *MO* :: *QS*. *AB*. Et on la prolongera du côté de *G* juſqu'au point *N*, en ſorte que *GN*. *NO* :: *QS*. *AB*. Du diametre *MN* on décrira un cercle qui coupera la ligne *DE* en un point *K*, duquel point comme centre, & du rayon *KO* ayant décrit un cercle; ce cercle rencontrera la ligne *DE* aux deux points cherchés *D*, *E*.

Comme le cercle qui a pour diametre la ligne *MN*, coupe la droite *DE* non ſeulement au point *K*, mais encore en un autre point *L*; il s'enſuit qu'on peut ſe ſervir du point *L* de même que l'on a fait du point *K*, pour trouver ſur la ligne *DE* deux autres points qui ſatisferont également, & qu'ainſi cette queſtion peut avoir deux differentes ſolutions.

Si l'angle *DCE* devoit être droit auſſi bien que l'angle *DOE*, il eſt clair que *QS* (f) deviendroit nulle, & qu'ainſi l'égalité $f\sqrt{aa+xx} = cd - cx$ ſe changeroit en celle-ci $cd - cx = 0$ d'où l'on tire $x = d$; c'eſt à dire que le centre *K* tom-

beroit alors sur le point G. Et si le point B tomboit sur le point A, l'égalité $f\sqrt{aa+xx} = cd - cx$ se changeroit en celle-ci $f\sqrt{aa+xx} = \frac{aa-bb}{2}$ en mettant pour cd sa valeur $\frac{aa-bb-cc}{2}$, & effaçant ensuite les termes où c (qui devient en ce cas nul) se rencontre ; d'où l'on voit que dans ce cas, si du point O comme centre, & du rayon $OK = \frac{aa-bb}{2f}$ on décrit un arc de cercle, il coupera la ligne DE au point cherché K. Ceci s'accorde parfaitement avec les articles 66. 67. 68. du Livre second, & la construction generale peut servir à trouver tout d'un coup dans une Ellipse dont deux diametres conjugués sont donnés, deux autres diametres conjugués qui fassent entr'eux un angle donné ; ce qui dans l'art. 65. avoit été renvoyé ici.

EXEMPLE IV.

245. TROIS points A, B, C, étant donnés, en trouver un quatriéme, M duquel ayant mené à ces points les droites MA, MB, MC ; les differences de l'une d'elles aux deux autres soient données. FIG. CCXLV.

Cette question est susceptible de trois differens cas. Car ou les trois lignes MA, MB, MC, sont toutes égales entr'elles ; ou il y en a seulement deux qui soient égales entr'elles ; ou enfin toutes les trois sont inégales entr'elles.

Premier cas. Lorsque les trois lignes MA, MB, MC, sont égales entr'elles ; ou ce qui est la même chose lorsque les deux differences données sont nulles. Il est clair que le point cherché M sera le centre du cercle qui passe par les points donnés A, B, C.

Second cas. Lorsque deux des trois lignes MA, MB, MC, comme MA, MB, doivent être égales entr'elles ; ou (ce ce qui est la même chose) lorsqu'une des differences données est nulle. FIG. CCXLVI.

Ayant tiré du point donné C, la perpendiculaire CO sur la ligne AB qui joint les deux autres points donnés A, B ; du point M que l'on suppose être celui qu'on cherche, ayant mené les droites MP, MQ, paralleles à CO, OB ; il est clair que AP sera égale à PB, puisque AM doit être égale à MB.

Nommant donc les données AP ou PB, a; OP, b; OC, c; $AM - MC$, f; & les inconnuës AM, z; PM, y; les triangles rectangles APM, MQC, donneront ces deux égalités $zz = aa + yy$, & $zz - 2fz + ff = cc - 2cy + yy + bb$; d'où en retranchant par ordre chaque membre de la premiere, il vient $2fz - ff = aa - cc + 2cy - bb$, qui se reduit à cette proportion $z . y + \frac{aa-bb-cc+ff}{2c} :: c . f$. De là on tire la construction suivante.

Soit menée par le point de milieu P de la ligne AB, la perpendiculaire $PD = \frac{aa-bb-cc+ff}{2c}$. Soit divisée l'hypothenuse AD prolongée du côté qu'il sera necessaire, aux points E, F; en sorte que $AE . ED :: c . f$, & $AF . FD :: c . f$. Du diametre EF soit décrit un cercle; il coupera la ligne PD au point cherché M.

Car ayant mené la droite MA, il est clair par la proprieté du * Art. 350. cercle EMF, *que $AM (z) . MD (y + \frac{aa-bb-cc+ff}{2c}) :: c . f$; & par la proprieté de la perpendiculaire PM, que $zz = aa + yy$. Or comme ces deux équations renferment les conditions du Problême, il s'ensuit &c.

Si par l'autre point N, où la ligne DP rencontre la circonference, on mene les droites NA, NB, NC; les deux NA, NB, seront égales entr'elles, & la difference de chacune de ces deux droites à la troisiéme NC sera égale à la donnée f; de sorte que le point N satisfait aussi, mais avec cette difference que NC est la plus grande des trois droites NA, NB, NC, au lieu que MC est la plus petite des trois MA, MB, MC.

FIG. CCXLVII. On peut encore resoudre ce second cas sans aucun calcul. Je suppose comme auparavant que M soit le point cherché, & ayant tiré les droites MA, MB, MC, je décris du centre C, & du rayon $CD = MA - MC$, un cercle $DEKFH$. Du point D où la ligne MC rencontre ce cercle, je mene aux deux points donnés A, B, les droites DA, DB qui rencontrent le cercle aux points E, F; par où je tire les rayons EC, CF, & la corde EF. Cela fait, puisque $MC + CD$ ou $MD = MA$, & que les lignes CD, CE, sont rayons d'un même cercle, les triangles DMA; DCE, seront isoscelles; & par consequent semblables parce que l'angle en D est commun: c'est pourquoi les lignes CE, MA, seront paralleles. On prouvera de même que les lignes, CF, MB, seront aussi paralleles; ce qui donne $DA . DE :: DM . DC :: DB . DF$. Et de là on voit que

toute la difficulté se reduit à trouver sur la circonference du cercle *DEKFH*, le point *D* tel qu'ayant mené les droites *DA*, *DB*, qui rencontrent la circonference aux points *E*, *F*; la corde *EF* soit parallele à la ligne *AB*. Or cela se peut faire ainsi.

Ayant décrit du point *C* un cercle qui ait pour rayon une ligne $CD = AM - MC$, & tiré *AC* qui rencontre ce cercle aux points *K*, *H*; on prendra sur *AB* la partie *AG* quatriéme proportionelle à *AB*, *AH*, *AK*, & on menera du point *G* la tangente *GE* au cercle *EDHFK*. Ayant mené par le point touchant *E* la ligne *AE* qui rencontre le cercle au point *D*, on tirera *DC*, sur laquelle on prendra le point *M* tel que $DM. DC :: DA. DE$. Je dis qu'il sera celui qu'on cherche.

Car par la proprieté du cercle *DEKFH* le rectangle $HA \times AK = DA \times AE$; Et par consequent $BA. AD :: AE. AG$: c'est pourquoi les triangles *DAB*, *GAE*, qui ont l'angle *A* commun, & les côtés autour de cet angle reciproquement proportionnels, seront semblables. L'angle *AEG* sera donc égal à l'angle *ABD*; mais cet angle *AEG* étant fait par la tangente *EG* & par la corde *DE* prolongée du côté de *E*, a pour mesure la moitié de l'arc *DE*. Il sera donc égal (en tirant par le point *F* où la ligne *DB* rencontre la circonference, la corde *EF*) à l'angle *DFE*; & par consequent les lignes *FE*, *AB*, seront paralleles entr'elles. Or par la construction $DC. DM :: DE. DA :: DF. DB$. Les triangles *DMA*, *DMB*, seront donc isoscelles; puisque les triangles *DCE*, *DCF*, qui leur sont semblables sont isoscelles. Les lignes *AM*, *MB*, seront donc égales chacune à *DM*, & par consequent entr'elles; & de plus *AM* où *DM* surpassera *MC* de la grandeur donnée *CD*. Et c'est ce qui étoit proposé.

Troisiéme cas. Lorsque les trois lignes *MA*, *MB*, *MC*, sont inégales entr'elles. Du point donné *C*, je mene la perpendiculaire *CO*. sur la ligne *AB* qui joint les deux autres points donnés; & du point *M*, que je suppose être celui qu'on demande, les perpendiculaires *MP*, *MQ*, sur les lignes *AB*, *CO*. Je nomme les données *AO*, a; *OB*, b; *CO*, c; $AM - MB$, d; $AM - MC$; f; & les inconnuës *OP*, x; *PM*, y; *AM*, z: ce qui donne $AP = a + x$, $BP = b - x$, $CQ = c - y$, $BM = z - d$, $CM = z - f$. Par le moyen des triangles rectangles *APM*, *BPM*, *CQM*, je trouve le trois équations suivantes; la premiere, $zz = aa + 2ax + xx + yy$; FIG. CCXLVIII.

la deuxiéme, $zz - 2dz + dd = bb - 2bx + xx + yy$; la troisiéme, $zz - 2fz + ff = cc - 2cy + yy + xx$; & retranchant par ordre les membres des deux dernieres de ceux de la premiere, je forme une quatriéme, & une cinquiéme équation; sçavoir la quatriéme, $2dz - dd = aa - bb + 2ax + 2bx$, & la cinquiéme, $2fz - ff = aa - cc + 2ax + 2cy$. Je mets dans la premiere équation à la place de yy le quarré de la valeur de y trouvée par le moyen de la cinquiéme; & ensuite à la place de x sa valeur trouvée par le moyen de la quatriéme, & à la place de xx le quarré de cette valeur: ce qui donne enfin une égalité où il n'y a plus d'inconnuës que la seule z qui ne monte qu'au quarré. C'est pourquoi on la pourra toûjours resoudre en n'employant que des lignes droites & des cercles, comme l'on a enseigné dans les articles 380, ou 382. (Liv. preced.) Or ayant la valeur de l'inconnuë z, il est facile de trouver le point cherché M; car il sera dans l'intersection de deux arcs de cercle, dont l'un aura pour centre le point A, & pour rayon la ligne AM (z); & l'autre pour centre le point B, & pour rayon la ligne BM ($z - d$.)

On voit assez qu'en achevant le calcul, on seroit arrivé à une égalité du deuxiéme degré qui auroit renfermé dans ses termes des quantités tres-composées; de sorte que pour les réünir sous des expressions simples, comme le demandent les articles 380, & 382, on auroit besoin d'un grand nombre d'operations; ce qui rendroit la construction tres longue. C'est pourquoi on se servira de celle-ci par le moyen de laquelle on reduit ce cas au precedent.

FIG. CCXLIX. Les deux droites AB, AC, qui joignent les points donnés étant divisées par le milieu aux deux points D, F, & ayant mené du point M que je suppose être celui qu'on cherche, les perpendiculaires MP, MQ, sur ces deux lignes; on nommera les données AB, $2a$; AC, $2b$; $AM - MB$, $2c$; $AM - MC$, $2d$; & les inconnuës DP, x; FQ, y. Cela posé, si l'on nomme $2t$ la somme inconnuë des deux droites AM, BM; la plus grande AM sera $t + c$ & la moindre BM sera $t - c$. Or les triangles rectangles APM, BPM, donnent $\overline{PM}^2 = \overline{AM}^2 - \overline{AP}^2 = \overline{BM}^2 - \overline{BP}^2$ c'est à dire en termes analytiques $tt + 2ct + cc - aa - 2ax - xx = tt - 2ct + cc - aa + 2ax - xx$, d'où l'on tire $t = \frac{ax}{c}$; & par

conſequent $AM\ (t + c) = \frac{ax}{c} + c$. On trouvera de même par le moyen des deux triangles rectangles AQM, CQM, que $AM = \frac{by}{d} + d$; ce qui, en comparant enſembles les deux valeurs de AM, donne cette équation $\frac{ax}{c} + c = \frac{by}{d} + d$, ou $\frac{ax}{c} = \frac{by}{d} + d - c = \frac{by}{d} + f$, en faiſant pour abreger $d - c = f$. D'où il eſt clair que le point cherché M doit être tel qu'ayant mené les perpendiculaires MP, MQ, ſur les deux droites AB, AC, on ait cette équation $\frac{ax}{c} = \frac{by}{d} + f$, ou ce qui revient au même cette proportion $x . y + \frac{df}{b} :: b . \frac{ad}{c}$. Or cela ſufit pour trouver la conſtruction ſuivante.

Ayant joint les points donnés par les deux droites AB, AC, & diviſé ces droites par le milieu aux points D, F; on prendra ſut AC du côté du point A la partie $FK = \frac{df}{b}$; & ayant tiré ſur AB, AC, les perpendiculaires DO, KS, qui ſe rencontrent au point H, on menera dans l'angle OHS la droite HM * qui ſoit le lieu des points M, tels qu'ayant tiré de chacun d'eux les perpendiculaires MO, MR, ſur les côtés HO, HS; la droite MO ſoit toûjours à la droite MR, en la raiſon donnée de b à $\frac{ad}{c}$. Enſuite l'on tirera AE perpendiculaire ſur HM, & l'ayant prolongée en G en ſorte que EG ſoit égale à AE, on trouvera par le ſecond cas le point M, tel qu'ayant mené les droites MA, MG, MC; les deux MA, MG, ſoient égales entr'elles, & la difference de MA à MC ſoit la donnée $2d$. Je dis qu'il ſatisfera à la queſtion.

* *Art.* 348.

Car par la proprieté de la droite HM, on aura toûjours MO ou $DP\ (x) . MR$ ou $QK\ (y + \frac{df}{b}) :: b . \frac{ad}{c}$; & par conſequent le point M ſe doit trouver dans cette ligne. Il ſera donc également éloigné des points A, G; mais de plus la difference de AM à MC doit être la donnée $2d$. Donc &c.

REMARQUE

433. SI au lieu que dans cet exemple, les deux differences de l'une de ces trois droites MA, MB, MC, aux deux autres ſont données ; on vouloit à preſent que ce fuſſent les deux ſommes de l'une de ces droites avec chacune des deux autres, ou bien la ſomme de l'une d'elles avec une autre & la difference de la même avec la troiſiéme: la queſtion n'en deviendroit pas plus difficile, & on pourroit toûjours la reſoudre

par les mêmes methodes. Ce que je n'expliquerai point en détail, afin de laisser quelque chose à l'industrie des Lecteurs.

COROLLAIRE I.

435. **D**E-LA on voit comment on peut décrire un cercle qui touche trois cercles donnés.

FIG. CCL. Car soient les points A, B, C, les centres des cercles donnés, & le point M celui du cercle qu'on cherche, lequel touche les cercles donnés aux points D, E, F, du côté que l'on voit dans la figure. Soient les rayons des cercles donnés $AD = a$, $BE = b$, $CF = c$; & le rayon du cercle qu'on cherche MD ou ME ou $MF = z$. Cela posé, on aura $AM = z + a$, $MB = z + b$, $MC = z - c$; & partant $AM - MB = a - b$, $MB - MC = b + c$. $AM - MC = a + c$. D'où il est evident que la question se reduit à trouver un point M, duquel ayant mené aux trois points donnés A, B, C, les droites MA, MB, MC, leurs differences soient données.

COROLLAIRE II.

436. **D**E-LA on tire encore la maniere de décrire une Section conique qui ait pour foyer un point donné F, qui passe par deux autres points donnés B, C, & qui touche une ligne droite DE donnée de position.

FIG. CCLI. CCLII.

On doit distinguer ici deux differens cas, dont le premier est, lorsque les trois points donnés F, B, C, tombent du même côté de la droite indéfinie DE; & le second lorsqu'ils tombent de part & d'autre.

FIG. CCLI. *Premier cas*. Ayant mené FD perpendiculaire sur DE, & l'ayant prolongée en A en sorte que DA soit égale à DF; on tirera les droites FB, FC. On trouvera le point M tel que la difference de AM & BM soit égale à FB, & celle de AM & MC égale à FC. On décrira ensuite * une Section conique qui ait pour ses deux foyers les points F, M, & pour l'axe qui passe par les foyers une ligne égale à AM. Je dis qu'elle sera celle qu'on cherche.

* *Def.* 1. II. & 1. III.

Car 1°. Le point E où la ligne AM rencontre la droite DE est à la Section, puisque FE étant égale à AE, on aura dans l'Ellipse la somme des droites FE, EM, & dans l'Hyperbo-

le la difference égale à l'axe qui paſſe par les foyers; & par la même raiſon les points *B*, *C*, ſeront auſſi dans la Section. Par la conſtruction les angles *FED*, *DEA*, ſont égaux entr'eux; * & par conſequent la ligne *ED* eſt * tangente en *E*. * *Art.* 60. & 123.

Il faut remarquer dans ce cas que lorſqu'on cherche le foyer *M* du même côté du foyer donné *F* par rapport à la ligne *DE*, la Section qu'on trouve eſt une Ellipſe; au lieu qu'elle ſera une Hyperbole ou deux Hyperboles oppoſées, lorſqu'on le cherchera de l'autre côté.

Second cas. Il eſt évident que dans ce dernier cas il ne peut y avoir d'Ellipſe qui ſatisfaſſe, mais ſeulement deux Hyperboles oppoſées. Pour les trouver; ayant mené comme dans le premier cas *FD* perpendiculaire ſur *DE*, & l'ayant prolongée en *A* en ſorte que *DA* ſoit égale à *DF*; on cherchera le point *M* tel que la ſomme de *AM* & *BM* ſoit égale à la donnée *FB*, & la difference de *AM* & *MC* ſoit égale à la donnée *FC*. On décrira enfin deux Hyperboles oppoſées qui ayent pour foyers les deux points *F*, *M*, & dont le premier axe ſoit égal à *AM*. Je dis qu'elles ont les conditions requiſes. Fig. CCLII.

Car 1°. Le point *E*, où la ligne *AM* rencontre la ligne *DE*, ſera à l'une de ces deux Hyperboles, puiſque *FE* étant égale à *AE*, la difference des droites *FE*, *ME*, ſera égale à *AM* valeur du premier axe; & par la même raiſon les points *B*, *C*, ſeront à ces Hyperboles. 2°. La ligne *DE* ſera * tangente en *E*, puiſque par la conſtruction les angles *AED*, *DEF*, ſont égaux entr'eux. * *Art.* 123.

Si le point *C* tomboit du même côté du point *B* par rapport à la ligne *DE* la ſomme des deux droites *AM* & *MC* ſeroit égale à la donnée *FC*; au lieu que c'eſt la difference lorſque les points *B*, *C*, tombent de part & d'autre de la ligne *DE*, comme l'on a ſuppoſé dans cette figure.

Si l'on propoſoit de décrire une Section conique qui eût pour foyer un point donné, pour tangentes deux lignes données de poſition, & qui paſſât par un autre point donné; on trouveroit par le moyen de ces deux lignes deux points comme l'on vient de faire le point *A*, deſquels ayant mené deux droites qui aboutiſſent à l'autre foyer qu'on cherche, elles doivent être égales entr'elles, & leur difference ou leur ſomme avec celle qui part du point où doit paſſer la Section & qui aboutit au même foyer, ſera toûjours donnée: de ſorte qu'on pourra toû-

jours resoudre la question par le moyen de l'Exemple precedent & de sa Remarque. Enfin s'il falloit décrire une Section qui touchât trois lignes données de position, & qui eût pour foyer un point donné ; on trouveroit par le moyen de ces trois lignes trois points, comme l'on a fait le point A par le moyen de la ligne DE dans les deux cas precedens, & le centre du cercle qui passeroit par ces trois points, seroit l'autre foyer de la Section, laquelle auroit pour premier axe une ligne égale au rayon de ce cercle.

On doit observer dans tous ces differens cas, que si le point cherché M étoit infiniment éloigné du point F ; la Section deviendroit alors une Parabole dont les diametres seroient paralleles aux lignes, qui, continuées à l'infini, aboutiroient au point cherché.

EXEMPLE V.

436. UNE Parabole NCS étant donnée avec un de ses arcs
FIG. CCLIII. MN; trouver un autre arc RS qui soit à l'arc MN, en raison donnée de nombre à nombre.

Ayant prolongé l'axe de la Parabole du côte de son origine C jusques en A, en sorte que CA soit égal à la moitié de son parametre, & décrit une Hyperbole équilatere EAF qui ait pour centre le point C & pour la moitié de son premier axe la ligne CA; on menera parallelement à l'axe CA les droites MB, NE, RD, SF, qui rencontrent le second axe aux points H, L, K, O, & l'Hyperbole aux points B, E, D, F, desquels on tirera sur les Asymptotes les perpendiculaires BP, EQ, DG, FI. Cela fait, il est
* Fig. 259. visible que le rectangle $AC \times MN$ ou * le Trapese hyperbolique $HBEL$ est égal au Secteur hyperbolique CBE plus le triangle CLE moins le triangle CHB; & de même que $AC \times RS = CDF + COF - CKD$. Or supposant que la raison donnée de l'arc MN à l'arc PS soit comme m est à n (les lettres m & n expliquent des nombres entiers quelconques) on aura par la condition du Problême $AC \times MN$ ou $CBE + CLE - CHB . AC \times RS$ ou $CDF + COF - CKD :: m . n$, & par consequent $n\,CBE + n\,CLE - n\,CHB = m\,CDF + m\,COF - m\,CKD$. Si donc l'on nomme les données CP, b; CQ; c; l'inconnuë CG, x; & qu'on prenne CI

$= x \sqrt[m]{\frac{c^n}{b^n}}$, il est clair * que le Secteur hyperbolique CBE. $CDF :: m . n$, & qu'ainsi $nCBE = mCDF$; d'où l'on voit que l'égalité precedente se change en celle-ci $nCLE - nCHB = mCOF - mCKD$ qui ne renferme plus d'espaces hyperboliques, mais seulement des triangles rectangles dont il s'agit maintenant de trouver les valeurs analytiques. * Art. 223.

Les droites CP, HB, forment en s'entrecoupant au point V deux triangles rectangles VHC, VPB, qui sont semblables ; puisque les angles en V étant opposés au sommet sont égaux ; ce qui donne $HV . CV :: VP . VB$, & en multipliant les extrêmes & les moyens $HV \times VB = CV \times VP$. De plus à cause de l'Hyperbole équilatere EAF, l'angle VCA ou CVH * est demi droit, & par consequent le triangle rectangle CHV est isoscelle, aussi-bien que son semblable VPB, ce qui donne $VP = PB$, $CH = HV$, & $\overline{CV}^2 = \overline{CH}^2 + \overline{HV}^2 = 2\overline{HV}^2$. Donc le quadruple du triangle rectangle CHB, c'est à dire $2CH \times HB = 2HV \times \overline{HV + VB} = 2\overline{HV}^2 + 2HV \times VB = \overline{CV}^2 + 2CV \times VP = \overline{CV}^2 + 2CV \times VP + \overline{VP}^2 - \overline{VP}^2 = \overline{CP}^2 - \overline{PB}^2$, puisque $\overline{CV}^2 + 2CV \times VP + \overline{VP}^2$ est le quarré de $CV + VP$ ou de CP. Et par consequent le triangle $CHB = \frac{1}{4}\overline{CP}^2 - \frac{1}{4}\overline{PB}^2$. On prouvera de même que le triangle $CLE = \frac{1}{4}\overline{CQ}^2 - \frac{1}{4}\overline{QE}^2$, que le triangle $CKD = \frac{1}{4}\overline{CG}^2 - \frac{1}{4}\overline{GD}^2$, & enfin que le triangle $COF = \frac{1}{4}\overline{CI}^2 - \frac{1}{4}\overline{IF}^2$. C'est pourquoi nommant aa la puissance de l'Hyperbole, on aura le triangle $CHB = \frac{1}{4}bb - \frac{a^4}{4bb}$, le triangle $CLE = \frac{1}{4}cc - \frac{a^4}{4cc}$, le triangle $CKD = \frac{1}{4}xx - \frac{a^4}{4xx}$, le triangle $COF = \frac{xx}{4}\sqrt[m]{\frac{c^{2n}}{b^{2n}}} - \frac{a^4}{4xx}\sqrt[m]{\frac{b^{2n}}{c^{2n}}}$; puisque * $PB = \frac{aa}{b}$, $QE = \frac{aa}{c}$, $IF = \frac{aa}{x}\sqrt[m]{\frac{b^n}{c^n}}$: & mettant ces valeurs à la place des triangles qu'elles expriment dans l'égalité $nCLE - nCHB = mCOF - mCKD$, on en formera celle-ci $\frac{1}{4}n \times cc - \frac{a^4}{cc} - bb + \frac{a^4}{bb} = \frac{1}{4}m \times xx \sqrt[m]{\frac{c^{2n}}{b^{2n}}} - \frac{a^4}{xx}\sqrt[m]{\frac{b^{2n}}{c^{2n}}} - xx + \frac{a^4}{xx}$ qui se reduit, en operant selon les regles or-

* Def. 16. III.

* Art. 101.

dinaires de l'Algebre, à cette égalité du deuxiéme degré $x^4 - \frac{na^4 - mbbcc \times cc - bb \times \sqrt[m]{b^{2n}}}{mbbcc \times \sqrt[m]{c^{2n}} - \sqrt[m]{b^{2n}}} xx + a^4 \sqrt[m]{\frac{b^{2n}}{c^{2n}}} = o$, dont la resolution doit fournir pour CG (x) une valeur telle qu'en prenant $CI = x \sqrt[m]{\frac{c^n}{b^n}}$, & tirant les perpendiculaires GD, IF, qui rencontrent l'Hyperbole équilatere aux points D, F; l'arc RS que les paralleles DR, FS à l'axe coupent sur la Parabole, sera à l'arc MN en la raison donnée de n à m.

Il est à propos de remarquer, 1°. Que le second terme de cette égalité est toujours negatif, parce que CQ (c) surpasse CP (b); & qu'ainsi ces deux racines seront toutes deux vraies ou toutes deux imaginaires, selon que la moitié de la grandeur connuë au second terme est plus grande ou moindre que $aa \sqrt[m]{\frac{b^n}{c^n}}$ racine quarrée du dernier terme : ce qui est une suite de la resolution des égalités du second degré. 2°. Que $\overline{CG}^2$ (xx) étant une des racines de cette égalité, $\overline{IF}^2$ en sera l'autre. Car puisque $CI = x \sqrt[m]{\frac{c^n}{b^n}}$, il s'ensuit * que $IF = \frac{aa}{x} \sqrt[m]{\frac{b^n}{c^n}}$. Or on sçait que le dernier terme d'une égalité, est le produit de ses racines. Si donc on divise le dernier terme $a^4 \sqrt[m]{\frac{b^{2n}}{c^{2n}}}$ de l'égalité precedente, par le quarré $\overline{CG}^2$ (xx) que l'on suppose être l'une de ses deux racines; l'autre sera $\frac{a^4}{xx} \sqrt[m]{\frac{b^{2n}}{c^{2n}}}$ qui est le quarré de FI. D'où l'on voit que si l'on prend sur les deux Asymptotes les parties CG, CT, égales aux deux racines de l'égalité precedente; & qu'ayant tiré les paralleles GD, TF, aux Asymptotes, on mene par les points D, F, où elles rencontrent l'Hyperbole équilatere EAF, les paralleles DR, FS, à l'axe : elles couperont sur la Parabole l'arc cherché RS.

* Art. 121.

Si $m = n$, l'équation generale se changera en celle-ci $x^4 - \frac{bbcc - a^4}{cc} xx + \frac{a^4 bb}{cc} = o$, dont les deux racines fournissent CG $(x) = b = CP$, & CT $(x) = \frac{aa}{c} = QE$; d'où il suit qu'on trouve par leur moyen un arc RS, semblablement posé de l'autre côté de l'axe, par rapport à l'arc MN. Or comme l'on sçait d'ailleurs * que les deux arcs RS, MN, étant semblablement

* Art. 86.

blement poſés de part & d'autre de l'axe ſont égaux entr'eux, cela ſert à confirmer les raiſonnemens que l'on vient de faire. De-là il eſt aiſé de conclure qu'un arc parabolique *MN* étant donné, on n'en peut trouver aucun autre *RS* qui ſoit plus proche ou plus éloigné de l'origine *C* de l'axe & qui lui ſoit égal; ſans ſuppoſer la quadrature de quelque Secteur hyperbolique, ou (ce qui revient au même) la rectification de quelque arc parabolique.

Si $m = 1$ & $n = 2$, on aura $x^4 - \frac{2a^4bb - 2ccb^4}{c^4 + bbcc}xx + \frac{a^4b^4}{c^4} = 0$, & ſi $m = 2$ & $n = 3$, ou, ce qui eſt la même choſe, ſi l'arc *RS* doit être à l'arc *MN* comme 3 eſt à 2, on trouvera $x^4 - \frac{\overline{3a^4 - 3bbcc} \times \overline{bcc - b^3}}{2c^5 - 2ccb^3}xx + \frac{a^4b^3}{c^3} = 0$; & la reſolution de ces égalités fournira celle du Problême. Il en eſt de même des autres valeurs de m & n.

M. *Bernoulli* celebre Profeſſeur des Mathematiques à Groningue, a reſolu le premier ce Problême d'une maniere differente de celle-ci. On peut voir ce qu'il en dit dans les Actes de Leipſic de l'année 1698. p.261.

EXEMPLE VI.

437. UN angle *BAC* étant donné avec un point *D* au dedans de cet angle; décrire un cercle qui paſſe par le point donné *D*, qui touche le côté *AB* en quelque point *P*, & qui coupe ſur l'autre côté *AC* une partie *OC* égale à une ligne donnée $2a$. FIG. CCLIV.

Ayant ſuppoſé le Problême reſolu, on menera du point donné *D*, la ligne *DA* qui paſſe par le ſommet *A* de l'angle donné, la ligne *DP* qui paſſe par le point touchant *P* & rencontre en *H* le côté *AC* prolongé, la ligne *DE* parallele à *AC*, & la perpendiculaire *DB* ſur le côté *AB*: & ayant diviſé la partie interceptée *OC* ($2a$) par le milieu en *Q*, on nommera les inconnuës *AP*, x; *AQ*, z; *DH*, t; & les données *AE*, m; *AB*, g; *BD*, b; *DE*, f; *AD*, n. Cela fait, on aura par la proprieté du cercle $\overline{AP}^2$ $(xx) = CA \times AO$ ou $\overline{AQ}^2$ $(zz) - \overline{QO}^2$ (aa), & partant $zz = xx + aa$. De plus les triangles ſemblables *PED*, *PAH*, donnent *AE* (m). *AP* (x) :: *DH* (t). $HP = \frac{tx}{m}$. Et *PE* $(m - x)$. *ED* (f) :: *AP* (x). $AH = \frac{fx}{m-x}$. Donc $HQ = z + \frac{fx}{m-x}$ & $CH \times HO$ ou $\overline{HQ}^2 -$

$\overline{QO}^2 = zz + \frac{2fxz}{m-x} + \frac{ffxx}{\overline{m-x}^2} - aa = xx + \frac{2fxz}{m-x} + \frac{ffxx}{\overline{m-x}^2}$ (en mettant pour zz sa valeur $xx + aa$) $= DH \times HP$ $(\frac{ttx}{m})$ par la proprieté du cercle ; c'est à dire qu'en divisant par x, on aura cette égalité $x + \frac{2fz}{m-x} + \frac{ffx}{\overline{m-x}^2} = \frac{tt}{m}$. Or PD ou $DH - HP$ $= \frac{mt - tx}{m}$; & (à cause du triangle rectangle DBP) son quarré $\frac{mmtt - 2mttx + ttxx}{mm} = xx - 2gx + gg + bb = xx - 2gx + nn$ en mettant pour $bb + gg$ sa valeur nn ; d'où l'on tire $\frac{tt}{m} = \frac{mxx - 2gmx + mnn}{\overline{m-x}^2} = x + \frac{2fz}{m-x} + \frac{ffx}{\overline{m-x}^2}$, & multipliant par $m - x$, & transposant le terme $\frac{ffx}{\overline{m-x}^2}$, il vient $mx - xx + 2fz = \frac{mxx - 2gmx - ffx + mnn}{m-x} = \frac{mxx - mmx - nnx + mnn}{m-x}$, puisque à cause du triangle rectangle DEB on trouve $ff = bb + gg - 2gm + mm = nn - 2gm + mm$: c'est à dire, parce que la division se fait au juste, $mx - xx + 2fz = -mx + nn$ ou $2fz = xx - 2mx + nn$. Quarrant enfin chaque membre, & mettant pour zz sa valeur $xx + aa$ on aura cette égalité

$$\begin{array}{lllll} x^4 - 4mx^3 & + 4mmxx & - 4mnnx & + n^4 & = 0 \\ & - 4ff & & - 4aaff & \\ & + 2nn & & & \end{array}$$

qui est du quatriéme degré, & dont les racines que l'on trouvera par le moyen d'un cercle & d'une Parabole donnée ou de telle autre Section conique qu'on voudra doivent fournir pour AP (x) des valeurs telles que menant PM perpendiculaire sur AP, tirant PD, & faisant l'angle PDM égal à l'angle DPM, le point M, où se rencontrent les côtés DM, PM du triangle isoscelle DPM, soit le centre du cercle cherché, qui aura pour rayon la droite MP ou MD. Ou bien si l'on prend sur le côté AB la partie $AP = x$, & sur l'autre côté AC la partie $AQ = \sqrt{xx + aa}$, & qu'on mene sur ces côtés les perpendiculaires PM, QM ; le point M où elles se rencontrent, sera le centre du cercle qu'on demande.

Comme rien n'est plus propre à donner de l'ouverture à l'esprit, que de faire voir les differens chemins qu'on peut suivre pour arriver à la connoissance de la même verité ; je vais donner un autre maniere de resoudre cette question, qui me paroit encore plus naturelle que la precedente.

Ayant ſuppoſé que le point M ſoit le centre du cercle cherché, on menera les perpendiculaires MP, MQ, ſur les côtés de l'angle donné BAC, & les paralleles MF, MG, à ces côtés ; & du point donné D, on tirera les paralleles DB, DE, DK, à MP, MF, AB. On nommera enſuite les données DB, b ; BE, c ; DE, f ; AB, g ; AE, m ; AD, n ; & les inconnuës AP, x ; PM ou MD, y ; & on aura PB ou $DK = g - x$, $MK = y - b$: ce qui donne (à cauſe du triangle rectangle MKD) l'équation $yy = gg - 2gx + xx + yy - 2by + bb$, d'où l'on tire $y = \frac{xx - 2gx + bb + gg}{2b} = \frac{xx - 2gx + nn}{2b}$ en mettant pour $bb + gg$ ſa valeur nn. Or à cauſe des triangles ſemblables DBE, MPF, on a cette proportion DB (b) BE (c) :: PM (y). $PF = \frac{cy}{b}$, & partant AF ou $MG = \frac{bx - cy}{b}$; & à cauſe des triangles ſemblables DBE, MQG, DE (f). DB (b) :: MG ($\frac{bx - cy}{b}$). $MQ = \frac{bx - cy}{f}$. Donc puiſque par les conditions du Problême, il faut que QC moitié de la partie interceptée OC ſoit égale à la ligne donnée a, & que les droites MC & MP ſoient rayons d'un meme cercle cherché ; il vient $\overline{MC}^2 = \frac{bbxx - 2bcxy + ccyy}{ff} + aa = \overline{MP}^2$ (yy), & multipliant par ff on aura $bbxx - 2bcxy + ccyy + aaff = ffyy = bbyy + ccyy$, en mettant pour ff ſa valeur $bb + cc$, c'eſt à dire $ffxx + aaff = ccxx + 2bcxy + bbyy$, en effaçant de part & d'autre $ccyy$, & mettant pour $bbxx$ ſa valeur $ffxx - ccxx$; ce qui donne par l'extraction de la racine quarrée, $f\sqrt{xx + aa} = cx + by = \frac{2cx - 2gx + xx + nn}{2}$ en mettant pour y ſa valeur $\frac{xx - 2gx + nn}{2b}$, & enfin ſi l'on met pour $g - c$ ſa valeur m, on trouvera la même égalité que ci deſſus $2f\sqrt{xx + aa} = xx - 2mx + nn$.

Voici encore une nouvelle maniere de reſoudre cette queſtion, qui donne d'abord une conſtruction fort aiſée ; mais qui demande la deſcription de deux Paraboles. 1°. Je cherche le lieu des points M, tels qu'ayant mené de chacun de ces points au point donné D une ligne droite MD, & ſur la ligne AB donnée de poſition la perpendiculaire MP ; ces deux lignes MD, MP, ſoient toujours égales entr'elles : & je vois ſans

* *Art.* 1. aucun calcul que c'est * la Parabole qui a pour foyer le point D, & pour directrice la ligne AB. 2°. Je cherche le lieu des points M, tels qu'ayant décrit de chacun de ces points un cercle qui passe par le point donné D; ce cercle coupe sur la ligne AL donnée de position, la partie OC égale à une ligne donnée $2a$. Je mene à cet effet du point donné D la perpendiculaire DL sur AL, & d'un des points cherchés M que je regarde comme donné, les perpendiculaires MR, MQ, sur DL, AL, & ayant nommé les inconnuës & indéterminées DR, x; RM, y; qui font entr'elles un angle droit DRM, & la connuë DL, b; j'ai à cause du triangle rectangle MRD le quarré $\overline{MD}^2 = xx + yy$, & à cause du triangle rectangle MQC le quarré $\overline{MC}^2 = \overline{MQ}^2 (bb - 2bx + xx) + \overline{QC}^2 (aa)$. Or les lignes MD, MC, étant rayons du même cercle sont égales entr'elles, & par consequent $xx + yy = bb - 2bx + xx + aa$, ou $yy = bb + aa - 2bx$. Si donc l'on construit la Parabole qui est le lieu de cette équation, il est visible qu'elle passera par le centre M du cercle qu'on demande: mais la Parabole qui a pour foyer le point D & pour directrice la ligne AB devant aussi passer par ce centre, il s'ensuit que le centre du cercle cherché se trouvera dans l'interfection de ces deux Paraboles.

EXEMPLE VII.

438. UN cercle qui a pour centre le point A & pour rayon la
FIG. CCLV. droite AM, étant donné, avec deux points E, F, sur le même plan; trouver sur la circonference au dedans de l'angle EAF, le point M tel qu'ayant mené les droites AM, EM, FM; les deux angles AME, AMF, soient égaux entr'eux.

Si les lignes AE, AF, étoient égales entr'elles, il est visible que la ligne qui diviseroit par le milieu l'angle EAF, couperoit la circonference dans le point qu'on demande. C'est pourquoi on supposera que ces deux lignes sont inégales, & même pour éviter la confusion que c'est la ligne AE qui est moindre que la ligne AF. Or cela posé, je resouds ce Problême en deux differentes manieres.

PREMIERE MANIERE.

Ayant supposé que le point M soit celui qu'on cherche, on

menera les droites *MB*, *MD*, qui fassent sur *AF*, *AE*, des angles *MBA*, *MDA*, égaux aux angles *AMF*, *AME*, & par consequent entr'eux ; & à cause des triangles semblables *AFM*, *AMB*, & *AEM*, *AMD*, on aura ces deux proportions *AF*. *AM* :: *AM*. *AB*. Et *AE*. *AM* :: *AM*. *AD*. Donc puisque les lignes *AF*, *AE*, sont données avec le rayon *AM*, les parties *AB*, *AD*, des droites *AF*, *AE*, le seront aussi. Maintenant, si l'on mene les droites *MP*, *MQ*, paralleles à *AE*, *AF*; les triangles *BPM*, *DQM* seront semblables, puisque les angles *APM*, *AQM*, sont égaux, comme aussi les angles *PBM*, *QDM*, complemens à deux droits des angles égaux, *MBA*, *MDA*; & partant si l'on nomme les données *AB*, a; *AD*, b; & les inconnuës *AP* ou *QM*, x; *PM* ou *AQ*, y; on aura $BP\ (x-a)$. $PM\ (y)$ :: $DQ\ (y-b)$. $QM\ (x)$ ce qui donne (en multipliant les extrêmes & les moyens) cette équation $xx - ax = yy - by$, ou $yy - by - xx + ax = 0$, dont le lieu est * une Hyperbole équilatere qui se construit ainsi. * *Art.* 336.

Soient prises sur les lignes *AF*, *AE*, les parties *AB*, *AD*, troisiémes proportionnelles à *AF*, *AM*, & à *AE*, *AM*: soit tirée par le point *C* milieu de *BD* une ligne droite indéfinie *CH* parallele à *AB*, sur laquelle soit prise la partie $CK = \sqrt{\frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}aa}$ (la ligne *AD* (b) sera plus grande que *BA* (a), puisqu'on a supposé que *AE* est moindre que *AF*) : soit décrite une Hyperbole équilatere qui ait pour centre le point *C*, & pour la moitié d'un second diametre la droite *CK*, dont les ordonnées *HM* soient paralleles à *AD*. Je dis qu'elle rencontrera la circonference du cercle donné, au point cherché *M*. *Art.* 330. 334.

Car menant *CL* parallele *AD*; il est clair que les lignes *CH*, *CL*, diviseront par le milieu les droites *AD*, *AB*, aux points *O*, *L*; puisque le point *C* coupe en deux parties égales la ligne *BD*, & qu'ainsi *CH* ou $AP - AL = x - \frac{1}{2}a$, *HM* ou $PM - AO = y - \frac{1}{2}b$. Or par la proprieté de l'Hyperbole équilatere, $\overline{HM}^2 = \overline{CH}^2 + \overline{CK}^2$, c'est à dire en termes analytiques $yy - by + \frac{1}{4}bb = xx - ax + \frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}aa$; d'où l'on tire l'équation $yy - by = xx - ax$, qui étant reduite en pro-

portion, donne BP ($x - a$). PM (y) :: DQ ($y - b$) QM (x). Donc puisque les angles BPM, DQM, sont égaux, & que les côtés autour de ces angles sont proportionnels ; les triangles BPM, DQM, seront semblables, & par consequent l'angle MBP sera égal à l'angle MDQ, & leurs complemens à deux droits ABM, ADM, seront égaux. Mais puisque AB. AM :: AM. AF, & AD. AM :: AM. AE, les triangles ABM, AMF, & ADM, AME, seront semblables. L'angle ABM sera donc égal à l'angle AMF, & l'angle ADM à l'angle AME ; & par consequent les angles AMF, AME, seront égaux entr'eux, puisqu'on vient de prouver que les angles ABM, ADM, le sont.

On prouvera de même que l'Hyperbole opposée à celle-ci coupera la circonference au dedans de l'angle opposé au sommet à l'angle EAF, en un point M tel qu'ayant mené les droites AM, ME, MF ; les angles AME, AMF, seront égaux entr'eux : comme aussi que ces deux Hyperboles équilateres opposées couperont la circonference au dedans des angles qui sont à côté de ces deux-ci, chacune en un point M tel qu'ayant mené les droites MA, ME, MF ; l'angle AME sera égal au complement à deux droits de l'angle AMF.

* Def. 16. III. * Art. 114.

Si l'on prend sur CL la partie CG égale à CK, il est clair * que CG sera la moitié du premier diametre conjugué à CK, & qu'ainsi * l'une des Asymptotes de ces deux Hyperboles sera parallele à KG. Or dans le triangle isoscelle GCK, l'angle externe GCO ou son égal BAD vaut les deux internes opposés, c'est à dire le double de l'angle CGK. Donc puisque les lignes CG, AD, sont paralleles, il s'ensuit que la ligne KG & par consequent l'une des Asymptotes sera parallele à la ligne qui divise par le milieu l'angle DAB. De plus il est évident que la ligne AD est une double ordonnée au second diametre CK, puisque $\overline{OD}^2$ ou $\overline{OA}^2$ ($\frac{1}{4}bb$) $= \overline{CO}^2$ ($\frac{1}{4}aa$) $+ \overline{CK}^2$ ($\frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}aa$) ; & qu'ainsi l'une des Hyperboles équilateres opposées passe par le point D, & l'autre par le point A. Ces deux remarques donnent lieu à une nouvelle construction qui est plus simple que la precedente : la voici.

Ayant pris sur les lignes *AF*, *AE*, les parties *AB*, *AD*, troisiémes proportionnelles à *AF*, *AM*, & à *AE*, *AM*; on menera par le point de milieu C de la ligne *BD* deux droites indéfinies *CH*, *CK*, l'une parallele & l'autre perpendiculaire à la ligne *AP*, qui divise par le milieu l'angle donné *EAF*. On décrira ensuite entre ces deux lignes comme Asymptotes, par les points *D*, *A*, deux Hyperboles opposées, qui couperont la circonference du cercle donné en des points *M* tels qu'ayant mené les droites *MA*, *ME*, *MF*; les deux angles *AME*, *AMF*, seront égaux entr'eux lorsque le point d'intersection *M* tombe dans l'angle *EAF* ou dans son opposé au sommet; & l'angle *AME* sera égal au complement à deux droits de l'angle *AMF* lorsqu'il tombe dans l'un ou dans l'autre des angles à côté. Fig. CCLVI.

On n'est arrivé à cette derniere construction qu'en supposant la premiere qui est fondée sur le calcul, & en faisant ensuite des remarques qui sont assez recherchées. Il est cependant facile de la démontrer tout d'un coup, si l'on fait attention à une proprieté de l'Hyperbole équilatere qui se trouve dans l'article 361. (Liv. VIII.) & qui d'ailleurs se peut aisément prouver. Car si l'on mene du point *M* où l'Hyperbole équilatere *DM* rencontre la circonference du cercle donné, aux deux extremités *B*, *D*, du premier diametre *BD*, les droites *BM*, *DM*, qui rencontrent l'Asymptote *CH* aux points *O*, *L*, & la ligne *AP* qui lui est parallele aux points *S*, *R*; il est clair selon cet article, que *MO* est égal à *ML*, & qu'ainsi l'angle *MOL* ou *MSR* ou *BSA* est égal à l'angle *MLO* ou *DRA*. Mais par la construction l'angle *BAS* est égal à l'angle *DAR*, puisque la ligne *AP* divise par le milieu l'angle *EAF*. Partant les angles restans *ABM*, *ADM*, dans les deux triangles *ABS*, *ADR*, seront égaux entr'eux; d'où il suit que les angles *AMF*, *AME*, le sont aussi. Et c'est ce qui étoit proposé.

On peut trouver facilement par le moyen de cette derniere construction, une égalité trés-simple qui ne renferme qu'une seule inconnuë, & dont la construction qui se pourra faire par telle Section conique qu'on voudra suivant les regles prescrites dans le Livre precedent, fournira la resolution du Problême. Soit menée à cet effet du point *M* la ligne *MP* parallele à l'Asymptote *CK*, & qui rencontre l'autre Asym-

ptote CH au point H; & soient nommées les données AM, a; AK, b; CK, c; & les inconnues AP, x; PM, y. Cela posé, on aura par la proprieté du cercle l'équation $xx + yy = aa$, & par la proprieté des Hyperboles opposées

* Art. 100. * l'autre équation $CH \times HM$ ($xy - cx - by + bc$) $= CK \times KA$ (bc); ce qui donne $xy - cx - by = o$, d'où l'on tire $y = \frac{cx}{x-b}$. Mettant le quarré de cette valeur à la place de yy dans la premiere équation $xx + yy = aa$, & operant à l'ordinaire on formera cette égalité du quatriéme degré $x^4 - 2bx^3 + bbxx + 2aabx - aabb = o$.

$$\begin{array}{l} + cc \\ - aa \end{array}$$

Or si l'on mene du centre C des Hyperboles, perpendiculairement à AC, la ligne CG qui rencontre la circonference au point G; les triangles rectangles ACG, AKC, donneront $\overline{CG}^2 = \overline{AG}^2 - \overline{AC}^2 = \overline{AM}^2$ (aa) $- \overline{AK}^2$ (bb) $- \overline{CK}^2$ (cc). C'est pourquoi nommant la donnée CG, m; on changera l'égalité precedente en celle-ci $x^4 - 2bx^3 - mmxx + 2aabx - aabb = o$, dans laquelle les données sont le rayon AM (a), les lignes AK (b), CK (c), CG (m), & l'inconnuë x exprime des valeurs de AP telles que menant les perpendiculaires PM, elles rencontreront la circonference aux points cherchés.

Pour distinguer entre les deux points ou chaque perpendiculaire PM coupe la circonference du cercle, celui qui sert à la question presente; il faut observer de mener PM du côté où l'on a supposé que tomboit le point M par rapport à la ligne AP en faisant le calcul, lorsque sa valeur $\frac{cx}{x-b}$ qu'on a trouvé ci-dessus est positive, c'est à dire, lorsque x est en même temps vraie & plus grande que b, ou bien lorsqu'elle est fausse; & au contraire il la faut mener du côté opposé, lorsque sa valeur est negative, c'est à dire, lorsque x est en même temps vraie & moindre que b.

SECONDE MANIÉRE.

FIG. CCLVII. Ayant mené par le point cherché M que l'on regarde comme donné la droite MD perpendiculaire au rayon AM, & par le point D où elle rencontre AF la droite GH parallele à AM, laquelle rencontre en H la ligne MF, & en

en G la ligne EM prolongée qui coupe en C la droite AF ; on aura à cause des triangles semblables FAM, FDH, cette proportion : $AM . DH :: AF . FD$. Et à cause des triangles semblables CAM, CDG, cette autre , $AM . DG :: AC . CD$. Or la ligne DG est égale à DH, puisque par la condition du Problême les angles AME, AMF, devant être égaux, les angles DMH, DMG, le seront aussi. Donc $AF . FD :: AC . CD$, & $AF + FD . AF :: AC + CD$ ou $AD . AC$. Cela posé, soient menées EB, MP, perpendiculaires sur AF, & MQ perpendiculaire sur EB: & soient nommées les données AM, a; AB, b; EB, c; AF, d; & les inconnuës AP, x; PM, y. Les triangles rectangles semblables APM, AMD, donneront $AP\ (x) . AM\ (a) :: AM\ (a) . AD = \frac{aa}{x}$. Et partant $FD = d - \frac{aa}{x}$; & les triangles semblables EQM, MPC, donneront EQ ou $EB - MP\ (c - y) . QM$ ou $AP - AB\ (x - b) :: MP\ (y) . PC = \frac{xy - by}{c - y}$. Donc AC ou $AP + PC = \frac{cx - by}{c - y}$, & mettant dans la proportion precedente $AF + FD . AF :: AD . AC$ à la place de ces lignes leurs valeurs analytiques, on formera (en multipliant les moyens & les extrêmes) cette équation $2cdxx - aacx - 2bdxy + aaby + aady = aadc$, qui se reduit en divisant par $2cd$, & en faisant (pour abreger) $b + d = f$, à cette autre $xx - \frac{b}{c}yx - \frac{aa}{2d}x + \frac{aaf}{2cd}y - \frac{1}{2}aa = 0$, dont le lieu qui est une Hyperbole entre ses Asymptotes étant construit selon l'article 339. (Liv. VII.) coupera la circonference du cercle au point cherché M.

Si l'on veut avoir une égalité qui ne renferme que l'inconnuë x, on se servira de l'équation au cercle $xx + yy = aa$, dans laquelle mettant à la place de yy le quarré de y trouvé par le moyen de l'équation precedente, on arrivera à une égalité du quatrieme degré qui ne renfermera que l'inconnuë x, & dont l'une des racines exprimera la valeur de la cherchée AP.

EXEMPLE VIII.

439. UN cercle qui a pour centre le point A étant donné avec deux autres points E, F ; trouver sur la circonference le point M tel qu'ayant mené les droites AM, MF, ME; le sinus droit de l'angle AMF soit au sinus droit de l'angle AME, en la raison donnée de m à n. FIG. CCLVIII

Je resouds cette question en trois differentes manieres.

PREMIERE MANIE'RE.

Ayant pris sur les droites données AF, AE, les parties AB, AD, troisiémes proportionnelles à AF, AM, & à AE, AM; on menera du point cherché M que l'on regarde comme donné les droites MB, MD, les perpendiculaires MG, MH, sur AF, AE, & les paralleles MP, MQ, à AE, AF. Ayant pris sur BM la partie BK égale à DM, on tirera du point K les droites KO, KL, paralleles à MG, MP, & du point donné D la perpendiculaire DC sur AF. Cela fait, les triangles semblables BMG, BKO, donnent $BM . BK$ ou $DM :: MG . KO$. Or par la condition du Problême $m . n :: KO . MH$; puisque prenant DM pour rayon ou sinus total, les droites KO, MH, seront les sinus droits des angles MBF, MDE, ou de leurs complemens à deux droits MBA, MDA, égaux par la construction aux angles AMF, AME. Donc en multipliant par ordre les antecedens & les consequens de ces deux proportions on aura $m \times BM . n \times MD :: MG \times KO . KO \times MH :: MG . MH :: MP . MQ$. à cause des triangles semblables MPG, MQH. Cela posé.

On nommera les données AD, a; AC, b; CD, c; AB, d; AM, r; & les inconnuës AP ou MQ, x; PM ou AQ, y; & les triangles semblables ADC, PMG, QMH donneront $PG = \frac{by}{a}$, $MG = \frac{cy}{a}$, $QH = \frac{bx}{a}$, $HM = \frac{cx}{a}$, $AG = x + \frac{by}{a}$, GB ou $AB - AG = d - x - \frac{by}{a}$, DH ou $AQ + QH - AD = y + \frac{bx}{a} - a$. & à cause des triangles rectangles BGM, DHM, on aura $\overline{BM}^2$ ou $\overline{BG}^2 + \overline{GM}^2 = xx + \frac{2b}{a} xy + \frac{bbyy}{aa} - 2dx - \frac{2bd}{a} y + dd + \frac{ccyy}{aa} = xx + \frac{2b}{a} xy + yy - 2dx - \frac{2bd}{a} y + dd$ en mettant pour $bb + cc$ sa valeur aa à cause du triangle rectangle ACD; & de même $\overline{DM}^2 = yy + \frac{2b}{a} xy + xx - 2ay - 2bx + aa$. Or par la proprieté du cercle, le quarré $\overline{AM}^2$ $(rr) = \overline{AG}^2$ $(xx + \frac{2b}{a} xy + \frac{bbyy}{aa} + \overline{GM}^2$ $(\frac{ccyy}{aa}) = xx + \frac{2b}{a} xy + yy$ en mettant pour $bb + cc$ sa valeur aa. Si donc l'on substituë dans les valeurs de $\overline{BM}^2$ & de $\overline{DM}^2$ à

la place de $yy + \frac{2b}{a}xy + xx$ cette valeur rr, & que pour abreger on faſſe $rr + dd = ff$ & $rr + aa = gg$, on trouvera $BM = \sqrt{ff - 2dx - \frac{2bd}{a}y}$, & $DM = \sqrt{gg - 2ay - 2bx}$. Subſtituant enfin ces valeurs à la place de BM & de DM dans la proportion $m \times BM. n \times DM :: MP\ (y). MQ\ (x)$ que l'on a trouvée ci-deſſus; & multipliant les extrêmes & les moyens, on formera cette équation $mx\sqrt{ff - 2dx - \frac{2bd}{a}y} = ny\sqrt{gg - 2ay - 2bx}$ de laquelle quarrant chaque membre, & faiſant évanoüir l'inconnuë y par le moyen de l'équation au cercle $xx + \frac{2b}{a}xy + yy = rr$, on arrivera à une égalité du ſixiéme degré qui ne renfermera plus que l'inconnuë x, & qui étant reſoluë ſelon les regles du Livre precedent, donnera pour $AP\ (x)$ une valeur telle que menant PM parallele à AE, le point M où cette ligne rencontrera la circonference, ſera celui qu'on cherche.

Si l'on ſuppoſe que $m = n$, il eſt évident que les angles MBF, MDE, ſeront égaux ; & qu'ainſi les angles ABM, ADM, ou AMF, AME, le ſeront auſſi. D'où l'on voit que le Problême precedent n'eſt qu'un cas particulier de celui-ci.

SECONDE MANIE'RE.

Ayant joint les deux points donnés E, F, par une ligne droite, on tirera du centre donné A les droites AD, AP, l'une perpendiculaire & l'autre parallele à cette ligne, & par le point cherché M que l'on regarde comme donné la parallele PQ à AD, on menera auſſi du même point M, le rayon AM qui rencontre EF en O, & les droites EM, FM, ſur leſquelles on abaiſſera des points O, F, E, les perpendiculaires OG, OH, FC, EB. Cela fait, les triangles ſemblables EOG, EFC, & FEB, FOH, donneront $EO. EF :: OG. FC.$ Et $EF. FO :: EB. OH$, & partant $EO \times EF. EF \times FO$ ou $EO. FO :: OG \times BE. CF \times OH$, c'eſt à dire, en raiſon compoſée de OG à OH, ou de m à n (puiſqu'en prenant MO pour le rayon ou ſinus total, les droites OG, OH, ſont les ſinus droits des angles FIG. CCLIX.

EMO, *FMO*, complemens à deux droits des angles *AME*, *AMF*), & de *BE* à *CF* ou de *EM* à *MF* à cause des triangles rectangles semblables *BME*, *CMF*. On aura donc $EO . FO :: m \times EM . n \times MF$. Cela posé.

On nommera les données *AD* ou *PQ*, a; *ED*, b; *DF*, c; *AM*, r; & les inconnuës *AP*, x; *PM*, y; & on aura à cause des triangles semblables *APM*, *ADO*, cette proportion, $MP\ (y) . AP\ (x) :: AD\ (a) . DO = \frac{ax}{y}$. Et partant $EO = \frac{by + ax}{y}$, $FO = \frac{cy + ax}{y}$. Or les triangles rectangles *EMQ*, *FMQ*, donnent $\overline{EM}^2 = \overline{EQ}^2\ (bb + 2bx + xx) + \overline{MQ}^2\ (aa - 2ay + yy) = ff + 2bx - 2ay$ (en mettant pour $xx + yy$ sa valeur rr à cause du triangle rectangle *APM*, & faisant pour abreger $aa + bb + rr = ff$) & de même $\overline{FM}^2 = \overline{FQ}^2\ (cc - 2cx + xx) + \overline{MQ}^2\ (aa - 2ay + yy) = gg - 2cx - 2ay$ en mettant pour $xx + yy$ sa valeur rr, & faisant pour abreger $aa + cc + rr = gg$. Si dans la proportion precedente $EO . FO :: m \times EM . n \times MF$, on met à la place de ces lignes les valeurs analytiques que l'on vient de trouver, & qu'on multiplie les extrêmes & les moyens, on formera cette équation $\overline{bny + anx}\sqrt{gg - 2cx - 2ay} = \overline{mcy - max}\sqrt{ff + 2bx - 2ay}$, de laquelle quarrant chaque membre & faisant évanoüir l'inconnuë y par le moyen de l'équation au cercle $xx + yy = rr$, on arrivera encore à une égalité du sixiéme dégré, dont la resolution fournira pour *AP* (x) une valeur telle que menant la perpendiculaire *PM*, elle ira couper la circonference au point cherché *M*.

C'est à peu près de cette façon que M. Descartes resoud cette question dans la soixante cinquiéme de ses Lettres, Tom. 3. Elle lui avoit été proposée par M. de Roberval, d'une maniere qui paroît differente de celle-ci, mais qui dans le fond revient à la même chose.

TROISIE'ME MANIE'RE.

FIG. CCLX. Soient décrits des diametres *AE*, *AF*, deux cercles *ART*, *AST*, sur lesquels soient portées depuis le point *A* deux cordes quelconques *AR*, *AS*, qui soient toûjours entr'elles en la

raison donnée de m à n; & soient tirées les droites ER, FS, qui s'entrecoupent au point M. Je dis que la ligne courbe AM, qui est le lieu de tous les points M ainsi trouvés, coupera le cercle donné (dont le centre est en A) au point cherché M.

Car tirant AM & le prenant pour rayon ou sinus total, il est clair que la corde AR est le sinus droit de l'angle AME, & la corde AS le sinus droit de l'angle AMF.

Il est à propos de remarquer 1°. Que cette construction a cela de particulier, qu'elle ne réüssit pas seulement lorsqu'il s'agit de trouver le point M sur la circonference d'un cercle dont le centre est en A, mais encore sur telle ligne courbe qu'on voudra. 2°. Qu'ayant trouvé deux points de ce lieu de la maniere que l'on vient d'enseigner, les plus proches que l'on pourra de la ligne courbe donnée, il suffit d'en tracer la portion qui joint ces deux points; ce qui rend la pratique de cette construction fort aisée. 3°. Que le lieu de tous les points M ainsi trouvés est du quatriéme degré, comme il est facile de voir par le calcul de la seconde maniere, en observant de ne point substituer dans les valeurs de EM & FM à la place de $xx+yy$ le quarré rr que l'on trouve par le lieu au cercle ce qui donnera pour l'équation de ce lieu $\overline{nby+nax}\sqrt{\overline{c-x}^2+\overline{a-y}^2} = \overline{mcy-max}\sqrt{\overline{b+x}^2+\overline{a-y}^2}$, dont les inconnuës x & y montent au quatriéme degré, lorsqu'elle est délivrée d'incommensurables. 4°. Que ce n'est pas une faute legere en Geometrie, selon M. Descartes, d'employer une ligne courbe trop composée pour resoudre un Problême; de sorte que selon lui, on doit preferer à cette derniere solution les deux precedentes, où les deux lieux qu'on a trouvés, & qui détermineroient par leur intersection avec la circonference donnée, le point cherché, ne sont que du troisiéme degré. Il me paroît neanmoins que la facilité d'une construction & sa simplicité peuvent récompenser en quelque sorte ce défaut, & c'est ce qu'on verra encore dans l'Exemple qui suit.

EXEMPLE IX.

440. DIVISER un triangle scalene donné ABC en quatre parties égales, par deux lignes droites DE, FG, qui s'entrecoupent à angles droits au point H. FIG. CCLXI.

Si l'on fait attention ſur la nature de ce Problême, on verra 1°. Que deux des extremités D, F, des deux droites DE, FG, ſe trouvent neceſſairement ſur l'un des côtés AC du triangle donné ABC, & que leurs deux autres extremités E, G, ſe trouvent chacune ſur chacun des deux autres côtés BC, BA. 2°. Que les deux points cherchés D, F, doivent avoir deux conditions, dont la premiere eſt que les lignes DE, FG, qui diviſent chacune le triangle ABC en deux parties égales, s'entrecoupent à angles droits en un point H, & la ſeconde qu'elles forment avec les deux autres côtés du triangle donné, un quadrilatere $BGHE$ qui ſoit la quatriéme partie du triangle ABC. Cela poſé.

Soient menées ſur le côté FC les perpendiculaires GI, BK; EL, & ſoient nommées les données AC, $2a$; BK, b; AK, c; KC, d; & les inconnuës AF, x; CD, y. Puiſque le triangle AGF, ou $GI \times \frac{1}{2} AF$ doit être la moitié du triangle ABC (ab), il s'enſuit que $GI = \frac{ab}{x}$; & par la même raiſon $EL = \frac{ab}{y}$. Or les triangles ſemblables CBK, CEL, & ABK, AGI, donnent $BK\ (b).\ EL\ (\frac{ab}{y}) :: CK\ (d).\ CL = \frac{ad}{y}$. Et $BK\ (b).\ GI\ (\frac{ab}{x}) :: AK\ (c).\ AI = \frac{ac}{x}$. Et partant DL ou $CD - CL = y - \frac{ad}{y}$, FI ou $AF - AI = x - \frac{ac}{x}$. Mais les triangles rectangles DEL, FGI, ſont ſemblables entr'eux; puiſque chacun d'eux eſt ſemblable au même triangle FDH, qui eſt rectangle en H ſelon la condition du Problême que les deux lignes DE, FG, s'entrecoupent à angles droits. On aura donc $EL\ (\frac{ab}{y}).\ LD\ (\frac{yy-ad}{y}) :: FI\ (\frac{xx-ac}{x}).\ IG\ (\frac{ab}{x})$; ce qui donne, en multipliant les extrêmes & les moyens, cette équation $xxyy - acyy - adxx + aacd = aabb$, ou $\overline{xx - ac} \times \overline{yy - ad} = aabb$, qui renferme la premiere condition du Problême; de ſorte qu'il ne reſte plus qu'à accomplir la ſeconde; ſçavoir que le trapeſe $BGHE$ ſoit le quart du triangle donné ABC.

Pour en venir à bout. Du point d'interſection H des deux droites DE, FG, ſoient menées aux trois angles du triangle ABC, les lignes HA, HC, HB, & on aura 1°. $FD\ (x+y-2a).\ AF\ (x) :: FHD\ (\frac{1}{4}ab).\ FHA = \frac{abx}{4x+4y-8a}$. Et partant le triangle AHG ou le triangle FGA moins le triangle $FHA = \frac{1}{2}ab - \frac{abx}{4x+4y-8a}$. 2°. $AI\ (\frac{ac}{x}).\ IK\ (\frac{cx-ac}{x}) :: AG.\ AGB :: AHG\ (\frac{abx+2aby-4aab}{4x+4y-8a}).\ GHB = \frac{bxx-5abx+2bxy-2aby+4aab}{4x+4y-8a}$. On trouvera par un raiſonnement ſemblable que le triangle $HEB =$

$= \frac{byy - 5aby + 2bxy - 2abx + 4aab}{4x + 4y - 8a}$. Maintenant si l'on ajoûte ensemble les triangles *HGB*, *HEB*, on formera le quadrilatere *HGBE* qui doit être égal à la quantité $\frac{1}{4}ab$ quatriéme partie du triangle *ABC* : ce qui donne pour la seconde équation $xx + yy + 4xy - 8ax - 8ay + 10aa = 0$.

Si l'on fait évanoüir par le moyen de ces deux équations l'inconnuë y, on arrivera à une égalité de huitiéme degré qui renfermera toutes les conditions du Problême, & dans laquelle il n'y aura plus qu'une seule inconnuë x; de sorte que toute la difficulté est reduite à trouver les racines de cette égalité Et c'est ce qu'on peut faire par le moyen de deux lieux du troisiéme degré, comme l'on a enseigné dans les articles 417, & 418 (Liv. preced.) Mais comme la construction de ces lieux devient fort embarrassée & d'une longueur insuportable dans la pratique, à cause de la multitude des termes de leurs équations, il est beaucoup plus naturel de construire separément les lieux des deux équations que l'on vient de former, quoique l'un d'eux soit du quatriéme degré & par consequent plus composé, car l'autre n'étant que du second recompense ce défaut, & d'ailleurs la facilité de la construction doit déterminer en sa faveur : voici comment elle se fait.

Ayant mené deux lignes droites indéfinies *AB*, *AC*, qui font entr'elles un angle droit *BAC*; on prolongera *BA* en *E*, en sorte que $AE = \sqrt{ac}$, & *CA* en *F*, en sorte que $AF = \sqrt{ad}$. Ayant pris sur *AC* une partie quelconque *AP*; on décrira du centre *E* de l'intervalle *AP* un arc de cercle qui coupe *AC* en *G*; & ayant pris *AH*, en sorte que le rectangle $HA \times AG$ soit égal au triangle donné *BAC*, on prendra sur *AB* la partie $AQ = FH$. On menera ensuite les droites *PM*, *QM*, paralleles à *AB*, *AC*, lesquelles s'entrecoupent en un point *M*; & ayant trouvé en la même sorte une infinité d'autres points tels que *M*, on fera passer par tous ces points une ligne courbe *KML*. Cela fait, on prendra sur la diagonale *AD* du quarré *ABCD*, qui a pour côté la ligne *AC* égal au côté *AC* du triangle donné *ABC*, les parties $AT = \frac{1}{2}AD$, & $DS = \frac{1}{6}AD$; & on décrira du premier axe *TS* qui soit à son parametre comme 1 est à 3, une Hyperbole *OSR*. Je dis à present que si l'on mene du point *M* où je suppose qu'elle rencontre la ligne courbe *KML* au dedans du quarré *ABCD*, la perpendiculaire *MP* sur *AC*, & qu'on prenne sur le côté *AC* du triangle *ABC*, les parties

FIG. CCLXII.

$AF = AP$, & $CD = PM$; les points F, D, ſeront tels qu'ayant mené (ce qui eſt facile) les deux droites FG, DE, qui diviſe chacune le triangle ABC en deux parties égales; elles s'entrecoupent à angles droits & le partageront en quatre parties égales.

Car nommant AP, x; PM, y; on aura à cauſe des triangles AEG, FAH, rectangles en A, le quarré $\overline{AG}^2 = \overline{EG}^2$ $(xx) - \overline{AE}^2$ (ac), & le quarré $\overline{AH}^2 = \overline{FH}^2$ $(yy) - \overline{AF}^2$ (ad): Or puiſque par la conſtruction le rectangle $HA \times AG$ eſt égal au triangle donné BAC (ab), il s'enſuit que $\overline{HA}^2 \times \overline{AG}^2$ $(yy - ad \times xx - ac) = aabb$. La ligne courbe KML ſera donc le lieu de cette équation qui eſt la premiere des deux que l'on vient de trouver; & par conſequent ſa proprieté ſera telle que ſi l'on mene d'un de ſes points quelconques M pris au dedans du quarré $ABDC$, une perpendiculaire MP ſur AC & qu'on prenne ſur le côté AC du triangle donné ABC, les parties $AF = AP$, & $CD = PM$; les droites FG, DE qui diviſe chacune par le milieu le triangle ABC, s'entrecouperont à angles droits au point H.

De plus ſi d'un point quelconque M de l'Hyperbole OSR, on mene la perpendiculaire MV ſur ſon premier axe TS, & qu'on prolonge PM juſqu'à ce qu'elle rencontre la diagonale AD au point X; les triangles rectangles & iſoſcelles APX, MVX; donneront $1. \sqrt{2} ::$ AP ou PX (x) $AX = x\sqrt{2}$, & $\sqrt{2}. 1 ::$ MX $(x - y)$. MV ou $VX = \frac{x-y}{\sqrt{2}}$. Or par la conſtruction $AD = 2a\sqrt{2}$ puiſque $AC = 2a$, & par conſequent TS ou $DT - DS = \frac{2}{3}a\sqrt{2}$. On aura donc TV ou $AV - AT$ $= \frac{x+y-2a}{\sqrt{2}}$, & VS ou $TV - TS = \frac{3x+3y-10a}{3\sqrt{2}}$, & par la proprieté de l'Hyperbole $TV \times TS$ $(\frac{3xx+6xy+3yy-16ax-16ay+20aa}{6})$. $\overline{MV}^2$ $(\frac{xx-2xy+yy}{2}) :: 1. 3$, c'eſt à dire, comme le premier axe TS eſt à ſon parametre: ce qui donne en multipliant les extrêmes & les moyens cette équation $xx + yy + 4xy - 8ax - 8ay + 10aa = 0$. L'Hyperbole OSR en ſera donc le lieu, & joüira par conſequent de cette proprieté; ſçavoir que ſi l'on mene d'un de ſes points quelconques M pris au dedans du quarré $ABDC$, une perpendiculaire MP ſur AC, & qu'on prenne ſur le côté AC du triangle donné ABC, les parties $AF = AP$, & $CD = PM$; les droites FG, DE, qui diviſe chacune par le mi-

le milieu le triangle ABC, le couperont en quatre parties égales.

Maintenant puisque le point M se trouve en même temps sur la ligne courbe KML, & sur l'Hyperbole OSR; il s'ensuit que les points D, F, pris sur le côté AC du triangle donné, auront aussi en même temps les deux conditions requises. Et c'est ce qui étoit proposé.

S'il arrivoit que les deux courbes OSR, KML, ne se rencontrassent point au dedans du quarré $ABDC$, ce seroit une marque infaillible qu'on auroit fait une supposition fausse, sçavoir que les deux extremités D, F, se rencontrent sur le côté AC. C'est pourquoi il faudroit les supposer sur l'un des deux autres côtés, & recommencer le calcul, en faisant des raisonnemens semblables aux precedens, pour avoir une construction par rapport à ce nouveau côté. Mais si l'on fait les trois remarques suivantes, il sera aisé de prevoir lequel des trois côtés on doit prendre pour celui sur lequel tombent les deux extremités D, F, afin d'avoir sûrement une solution, & de n'être pas obligé de recommencer.

La premiere est que $\overline{CL}^2 = \frac{aabb}{4aa-ac} + ad$, & $\overline{BK}^2 = \frac{aabb}{4aa-ad} + ac$; ce qui se voit en mettant dans $yy = \frac{aabb}{xx-ac} + ad$ à la place de AP (x) sa valeur AC $(2a)$, & dans $xx = \frac{aabb}{yy-ad} + ac$ à la place de AQ (y) sa valeur AB $(2a)$. La seconde consiste en ce que $OR = \sqrt{2aa} = BO$; ce qui se trouve en mettant dans l'autre équation $xx + yy + 4xy - 8ax - 8ay + 10aa = 0$ dont le lieu est l'Hyperbole OSR, d'abord à la place de AP (x) sa valeur AC $(2a)$, & ensuite à la place de AQ (y) sa valeur AB $(2a)$. La troisiéme se tire de ce qu'en supposant AK (c) moindre que CK (d) comme on le fait ici, il s'ensuit que $\overline{BK}^2$ $(\frac{aabb}{4aa-ad} + ac)$ est moindre que $\overline{CL}^2$ $(\frac{aabb}{4aa-ac} + ad)$. Or cela posé, si l'on veut que $\overline{BK}^2$ $(\frac{aabb}{4aa-ad} + ac)$ soit moindre que $\overline{BO}^2$ $(2aa)$, on trouvera en mettant pour d sa valeur $2a - c$ & operant à l'ordinaire que $bb + cc$ doit être moindre que $4aa$, c'est à dire, que le côté AB du triangle donné ABC doit être moindre que le côté AC: & si l'on veut que le quarré $\overline{CL}^2$ $(\frac{aabb}{4aa-ac} + ad)$ soit plus grand que $\overline{CR}^2$ $(2aa)$, on trouvera en mettant pour c sa valeur $2a - d$ & operant à l'ordinaire que le côté BC $(\sqrt{bb + dd})$ doit surpasser le côté AC $(2a)$.

Mais il eſt viſible que *BK* étant moindre que *BO* & *CL* plus grande que *CR*, les deux lignes courbes *KML*, *OMR*, ſe coupent neceſſairement au dedans du quarré *ABDC*. D'où il ſuit que ſi le triangle donné *ABC* a tous les angles aigus, & qu'on prenne pour le côté *AC* ſur lequel on ſuppoſe que les deux points *F*, *D*, ſe rencontrent, celui des trois dont la grandeur eſt moyenne entre les deux autres & pour le côté *AB* le plus petit, le Problême aura toujours neceſſairement une ſolution, puiſqu'alors (*fig.* 261.) le point *K* ſe trouvera entre les points *A*, *C*, & que *AK* eſt moindre que *AC*, comme l'on a ſuppoſé en faiſant le calcul ſur lequel tout ce raiſonnement eſt fondé. On trouvera en la même ſorte que ſi le triangle donné eſt rectangle ou obtus angle, & qu'on prenne pour le côté *AC* ſur lequel doivent tomber les deux extremités *D*, *F*, le côté moyen, on aura toujours une ſolution; de ſorte que cette remarque eſt generale pour toutes ſortes de triangles.

On voit dans la figure 262. que l'Hyperbole *OSR* & la courbe *KML* ſe coupent non ſeulement dans un point *M*, au dedans du quarré *ABDC*, comme le demande le Problême; mais encore en un autre point *M* au dehors de ce quarré. Or ſi l'on veut ſçavoir quelle peut être l'utilité de cet autre point, on trouvera qu'il donne une des reſolutions du Problême ſuivant, dont celui-ci n'eſt qu'un cas particulier.

FIG.CCLXIII. Trouver ſur le côté *AC* du triangle donné *ABC*, deux points *F*, *D*, tels qu'ayant mené les droites *FG*, les triangles *FGA*, *DEC*, égaux chacun à la moitié du triangle *ABC*: les lignes *FG*, *DE*, s'entrecoupent à angles droits au point *H*, & le quadrilatere *BGHE* ſoit égal au quart du triangle *ABC*.

FIG.CCLXIII. & CCLXII. Car lorſque le point d'interſection *M* tombe au dedans du quarré *ABDC*, il eſt clair que les lignes *AP*, *PM* ſeront chacune moindre que le côté *AC*, & qu'ainſi les points *F*, *D*, qu'elles determinent tomberont tous deux entre les points *A*, *C*; ce qui reſoud le Problême énoncé comme l'on a fait au commencement. Mais lorſque le point *M* tombe au dehors du quarré, comme alors l'une des lignes *AP*, *PM* eſt moindre que ſon côté *AC*, & l'autre plus grande; il s'enſuit que l'un des points *F*, *D*, tombe ſur le côté *AC* du triangle donné, & l'autre ſur ce même côté prolongé, ce qui donne une autre ſolution du Problême enoncé comme l'on vient de faire en dernier lieu.

FIG.CCLXII. & CCLXIII.

EXEMPLE X.

441. UNE Section conique MAN étant donnée, avec un point S hors de son plan pour le sommet du cone dont elle est la Section; on demande la position du cercle MaN qui en est la base.

Je distingue cette question en deux differens cas, dont le premier est lorsque la Section donnée est une Parabole, & le second lorsque c'est une Ellipse ou une Hyperbole.

Premier cas. La question se reduit à trouver sur la Parabole, le point A tel qu'ayant mené de ce point le diametre AP avec la ligne AS; du point S la ligne SD parallele à AP; & d'un point quelconque P du diametre AP, une ordonnée PM à ce diametre dans le plan de la Parabole, & une perpendiculaire aD à cette ordonnée dans le plan du triangle DSA, qui rencontre les côtés SA, SD, aux points a, D: le quarré de PM soit égal au rectangle $aP \times PD$. Car décrivant dans le plan aPM un cercle qui ait pour diametre aD, il est clair qu'il passera par le point M, puisque l'angle APM est droit, & que $\overline{PM}^2 = aP \times PD$, qui est la proprieté essentielle du cercle; c'est pourquoi menant le diametre PA, & tirant de l'extremité D, du diametre Da du cercle une parallele DS à PA, qui rencontre aA menée de son autre extremité a par l'origine A du diametre AP, en un point S, le cone qui a pour sommet ce point, & pour base le cercle MAN, formera * par sa rencontre avec le plan APM la parabole même donnée MAN. Voici comment on peut trouver le point A. Fig. CCLXIV. * Art. 269.

Soit v le parametre inconnu du diametre AP, & l'on aura par la proprieté de la Parabole, $\overline{PM}^2 = AP \times v$: mais pour satisfaire au Problême, il faut que $\overline{PM}^2 = aP \times PD$. Donc $aP \times PD = AP \times v$; ce qui donne cette proportion $AP . Pa :: PD . v$, qui se change en menant AO parallele à Da en cette autre $SO . AO :: PD$ ou $AO . v$, & partant $SO \times v = \overline{AO}^2$.

Maintenant pour trouver les valeurs analytiques de ces lignes, je mene du point donné S sur le plan de la Para-

bole la perpendiculaire SF, & du point F où elle rencontre ce plan, sur l'axe BG la perpendiculaire FG, qui rencontre le diametre AP en H. Je tire du point A l'ordonnée AK à l'axe, & la perpendiculaire AQ à la tangente AL, lesquelles rencontrent en E & Q la ligne FQ menée par le point F parallelement à l'axe. J'éleve enfin du point Q une perpendiculaire QO sur le plan de la Parabole, qui rencontrera SD dans le même point O, où la ligne AO parallele à aD la rencontre. Car la tangente AL étant parallele à l'ordonnée PM qui est perpendiculaire sur aD, l'angle LAO sera droit aussi-bien que l'angle LAQ, & ainsi le plan QAO sera perpendiculaire sur AL, & sur le plan de la Parabole qui passe par cette ligne ; c'est pourquoi la ligne QO perpendiculaire à ce plan se trouvera dans le plan QAO & rencontrera par consequent la ligne SD dans le même point O, où le plan QAO, c'est à dire, la ligne AO parallele à aD la rencontre. Il est à remarquer que toutes ces lignes excepté les deux FS, QO, sont dans le plan de la Parabole. Cela posé.

Je nomme les données SF ou QO, a ; FG, ou KE, b, GB, c ; le parametre de l'axe, p ; & les inconnuës BK, x ; KA ou GH, y ; & j'ai à cause des triangles semblables AKT, AEQ, cette proportion $AK\ (y).\ KT\ (\frac{1}{2}p) :: AE\ (b+y).\ EQ = \frac{bp}{2y} + \frac{1}{2}p$: ce qui donne à cause des triangles AEQ, AQO, rectangles en E & Q, le quarré $\overline{AO}^2$ ou $\overline{AE}^2 + \overline{EQ}^2 + \overline{QO}^2 = \frac{bbpp}{4yy} + \frac{bpp}{2y} + \frac{1}{4}pp + bb + 2by + yy + aa$.

* Art. 17. Or le parametre du diametre AP sçavoir $v =$ * $p + 4x = p + \frac{4yy}{p}$, en mettant pour x sa valeur $\frac{yy}{p}$; & SO ou FQ ou $GB + BK + EQ = c + x + \frac{bp}{2y} + \frac{1}{2}p = c + \frac{yy}{p} + \frac{bp}{2y} + \frac{1}{2}p$. Mettant donc ces valeurs analytiques à la place des lignes qu'elles expriment dans l'égalité $\overline{AO}^2 = SO \times v$, on trouvera $\frac{bbpp}{4yy} + \frac{bpp}{2y} + \frac{1}{4}pp + bb + 2by + yy + aa = cp + yy + \frac{bpp}{2y} + \frac{1}{2}pp + \frac{4cyy}{p} + \frac{4y^4}{pp} + 2by + 2yy$, c'est à dire en effaçant de part & d'autre les quantités qui se trouvent les mêmes, substituant pour yy la valeur px, & operant ensuite à l'ordinaire ;

$$
\begin{aligned}
x^3 + cxx &+ \tfrac{1}{4}cpx - \tfrac{1}{16}bbp = 0 \\
+ \tfrac{1}{2}p\,xx &- \tfrac{1}{4}aa\,x \\
&- \tfrac{1}{4}bb\,x \\
&+ \tfrac{1}{16}pp\,x
\end{aligned}
$$

dont la vraie racine que l'on peut trouver par le moyen * de la Parabole même donnée, exprimera la valeur de l'inconnuë BK, qui sert à déterminer le point A tel qu'on le demande. * Art. 387.

Second cas. Toute la difficulté consiste à trouver sur l'Hyperbole donnée MAN, le point A tel qu'ayant mené le diametre AB avec les lignes SAa, BSb; & par un de ses points quelconques P, du diametre AB une ordonnée PM dans le plan de l'Hyperbole, & une perpendiculaire ab à cette ordonnée dans le plan du triangle aSb : on ait le quarré $\overline{PM}^2$ égal au rectangle $aP \times Pb$. Cela se prouve de même que dans la Parabole, & voici ce qu'il faut faire pour trouver le point A. FIG. CCLXV.

Soit v le diametre conjugué au diametre AB, & soient menées dans le plan du triangle aSb, les lignes AO parallele à ab, & OZ parallele à AB qui rencontre SA en Z; & l'on aura $AP \times PB$ à $\overline{PM}^2$ ou (à cause du cercle) à $aP \times Pb$, en raison composée de AP à Pa, ou ZO à OA, & de PB à Pb, ou de BA à AO; c'est à dire, comme $ZO \times AB$ est à $\overline{AO}^2$. Or par la proprieté de l'Hyperbole, $AP \times PB . \overline{PM}^2 :: \overline{AB}^2 . vv$; & partant $ZO \times AB . \overline{AO}^2 :: \overline{AB}^2 . vv = \frac{AB \times \overline{AO}^2}{ZO}$. Ce qui donne $OZ . AB$, ou $OS . SB :: \overline{AO}^2 . vv$.

Maintenant pour trouver les valeurs analytiques, tant de la raison de OS à SB, que des quarrés $\overline{AO}^2$ & vv; je mene du point donné S, la ligne SF perpendiculaire sur le plan des Hyperboles; du point F où elle rencontre ce plan, la perpendiculaire FG à l'axe DK qui est donné de position & de grandeur, puisque les Hyperboles sont données; & du point cherché A, l'ordonnée AK à l'axe, & la perpendiculaire AT à la tangente AL, lesquelles rencontrent la ligne BF aux points E, Q. Je tire enfin BH parallele à l'axe qui rencontre GF en X, TV parallele à BF qui rencontre AE en V, & BD, QR, perpendiculaires sur l'axe; & ayant élevé QO perpendiculaire sur le plan de l'Hyperbole, on prouvera comme dans la Parabole qu'elle rencontrera la li-

gne BS au même point O, où la ligne AO parallele à ab la rencontre. Il eſt à remarquer que toutes ces lignes excepté les deux FS, QO, ſont dans le plan des Hyperboles. Cela poſé.

Soient nommées $SF = a$, $FG = b$, $CG = c$, le premier axe $= 2d$, le ſecond $= 2f$, les inconnuës CK ou $CD = x$, AK ou BD ou GX ou $KH = y$; & l'on aura DK ou $BH = 2x$, DG ou $BX = c + x$, $GK = x - c$, $TK = \frac{ffx}{dd}$, & AT ou $\sqrt{\overline{TK}^2 + \overline{AK}^2} = \sqrt{yy + \frac{f^4xx}{d^4}}$

*Art. 81. $= \frac{f}{dd}\sqrt{ddxx + ffxx - d^4}$ en mettant pour yy ſa valeur * $\frac{ffxx}{dd} - ff$. Or les triangles ſemblables BXF, BHE, TKV donnent $BX\ (c + x) . XF\ (b - y) :: BH\ (2x) . HE = \frac{2bx - 2xy}{c + x} :: TK\ (\frac{ffx}{dd}) . KV = \frac{bffx - ffxy}{cdd + ddx}$; & partant AE ou $AK + KH + HE = \frac{2bx + 2cy}{x + c}$, & AV ou $AK - KV = \frac{cddy + ddxy + ffxy - bffx}{cdd + ddx}$: mais à cauſe des triangles ſemblables AVT, AEQ, & ATK, QTR, il vient $AV . AT :: AE . AQ = \frac{2bfx + 2cfy\sqrt{ddxx + ffxx - d^4}}{ddxy + ffxy - bffx + cddy}$, & $AT . TK :: QT . TR :: AT + TQ$ ou $AQ . KT + TR$ ou $KR = \frac{2bffxx + 2cffxy}{ddxy + ffxy - bffx + cddy}$. Donc $\frac{GR \text{ ou } GK + KR}{DG} = \frac{ddxy + ffxy + bffx - cddy}{ddxy + ffxy - bffx + cddy}$, $\frac{DR \text{ ou } DK + KR \times FS}{DG} = \frac{2addxy + 2affxy}{ddxy + ffxy - bffx + cddy} = QO$, puiſque $DG . DR :: BF . BQ :: FS . QO$; & à cauſe du triangle rectangle AQO, le quarré $\overline{AO}^2$ ou $\overline{AQ}^2 + \overline{QO}^2 = \frac{\overline{2bfx + 2cfy}|^2 \times \overline{ddxx + ffxx - d^4}| + \overline{2addxy + 2affxy}|^2}{\overline{ddxy + ffxy - bffx + cddy}|^2}$.

*Art. 125. De plus $SO . SB :: FQ . FB :: GK . GD$, & $vv =$ * $4xx + 4yy + 4ff - 4dd$ ou $4xx - 4dd + \frac{4ffxx}{dd}$.

Si donc l'on met dans la proportion $SO . SB :: \overline{AO}^2 . vv$, à la place tant de la raiſon de SO à SB ou GR à GD, que des quarrés $\overline{AO}^2$ & vv, les valeurs analytiques que l'on vient de trouver, on formera en multipliant les extrêmes & les moyens cette égalité $\overline{2bfx + 2cfy}|^2 \times \overline{ddxx + ffxx - d^4}| + \overline{2addxy + 2affxy}|^2 = \overline{ddxy + ffxy + bffx - cddy}| \times \overline{ddxy + ffxy - bffx + cddy}| \times \overline{4xx + \frac{4ffxx}{dd} - 4dd}|$, dans laquelle tous les termes où y ſe rencontrera au premier degré s'effaceront, & mettant à la

place du quarré yy sa valeur $\frac{ffxx}{dd} - ff$, on trouvera $bbd^4x^4 + 2bbddffx^4 + bbf^4x^4 - bbd^6xx - ccd^6xx - bbffd^4xx - ccffd^4xx + ccffd^6 + ccd^8 = \overline{ddxx + ffxx - d^4 - aadd - ccdd} \times \overline{ddx^4 + 2ffx^4 + \frac{f^4}{dd}x^4 - d^4xx - 2ddffxx - f^4xx}$ qui se change en faisant pour abreger $dd + ff = mm$, $bb + cc = nn$, $aa + dd + cc = rr$, en cette autre $bbm^4x^4 - mmnnd^4xx + ccmmd^6 = \overline{mmxx - ddrr} \times \overline{\frac{m^4}{dd}x^4 - m^4xx}$ qui se reduit enfin en faisant $xx = dz$ à cette égalité du troisiéme degré.

$$z^3 \left.\begin{matrix} -d \\ -\frac{drr}{mm} \\ -\frac{dbb}{mm} \end{matrix}\right\} \; zz \left.\begin{matrix} +\frac{ddrr}{mm} \\ +\frac{nnd^4}{m^4} \end{matrix}\right\} \; z - \frac{ccd^5}{m^4} = 0$$

dont l'une des racines, sçavoir celle qui est plus grande que d, est telle que prenant une moyenne proportionnelle entre cette racine & d moitié du premier axe ; cette moyenne proportionnelle exprime la valeur de CK qui sert à déterminer le point cherché A. On pourra se servir de l'Hyperbole même donnée pour trouver les racines de cette égalité, par le moyen des articles 396 & 399 du Livre precedent.

Lorsque CG (c) $= o$, c'est-à-dire, lorsque le point F tombe sur le second axe ; il est visible que cette égalité se change en une autre du second degré, puisque le dernier terme étant nul, elle se divise par z. Mais lorsque FG (b) $= o$, ce qui arrive lorsque le point F tombe sur le premier axe ; le terme $\frac{dbbzz}{mm}$ s'efface dans l'égalité precedente, & nn qui est $bb + cc$ devient cc ; ce qui fait qu'elle se peut diviser par $z - d$, & qu'elle se reduit par conséquent à celle-ci $zz - \frac{drr}{mm}z + \frac{ccd^4}{m^4} = o$, qui n'est encore que du second degré. Enfin si l'on fait dans cette derniere égalité $c = o$; ce qui doit arriver lorsque le point F tombe sur le centre C, puisqu'alors les lignes b & c deviennent chacune nulles ; on aura $z = \frac{drr}{mm}$, & partant dz ou $xx = \frac{ddrr}{mm}$, & $x = \frac{dr}{m} = d\sqrt{\frac{aa+dd}{dd+ff}}$.

Il est inutile d'avertir que le Problême se resoud par la même voie dans l'Ellipse, n'y ayant de changement que

dans quelques signes. Mais on peut toujours rapporter, si l'on veut, ce second cas au premier, de la maniere qui suit.

FIG. 4. Ayant mené par un point quelconque *B* de l'une des Hyperboles données, une tangente *BG*; & ayant fait passer par cette tangente, & par le sommet donné *S*, un plan *GBS*: soit mené par tout où l'on voudra, un autre plan *HKL* parallele à celui-ci. Je dis qu'il formera dans la surface conique, décrite par une ligne droite indéfinie attachée en *S*, & muë autour de l'Hyperbole opposée *MAN*, une ligne courbe *HKL* qui sera une Parabole; de sorte que toute la difficulté est reduite au cas precedent. Car supposant que le cercle *DHMNL* soit la base du cone, qui a pour sommet le point *S*, & pour Section l'Hyperbole *MAN* avec son opposée; il est clair que le plan *GBS* touchant les deux surfaces coniques opposées qui ont pour base ce cercle, dans le côté *BSD*, formera dans le plan de la base, une ligne droite *DE* qui touchera cette base en un point *D*. Or comme cette ligne est la directrice par rapport à la Section *HKL*, il s'ensuit selon la définition dixiéme du Livre VI. que cette Section sera une Parabole.

Ce Problême a été trés-celebre du temps de M. Descartes, & l'on en a trouvé une solution parmi ses Manuscrits, qui est imprimée à la fin de la 75[e] Lettre du 3[e] tome. Si l'on veut se donner la peine de comparer sa solution avec la mienne, on verra que non seulement elle est moins naturelle, puisqu'elle ne va pas droit au but, mais encore qu'elle est beaucoup plus embarrassée. Aussi ne donne-t-il point l'analyse du cas où la Section est une Ellipse ou une Hyperbole; & il se contente d'assurer que l'égalité qui renferme les conditions du Problême, ne doit pas passer le quatriéme degré.

LEMME I.

442. *SI par l'extremité* B *d'un diametre* AB, *l'on mene une corde* FIG. CCLXVI. CCLXVII. CCLXVIII. *quelconque* BD *qui termine l'arc* AD *moindre que la demie circonference; & qu'ayant pris par tout où l'on voudra deux arcs contigus* EF, FG, *égaux chacun à l'arc* AD, *on tire les cordes* BE, BF, BG: *je dis que la corde du milieu* BF *est à la somme*

somme ou à la difference de ses deux voisines BE, BG, *comme le rayon* CB *est à la corde* BD : *sçavoir à la somme lorsque l'origine commune* B *des cordes* BD, BE, BF, BG, *ne tombe sur pas un des deux arcs* EF, FG; *& au contraire à la difference, lorsqu'il tombe sur l'un ou l'autre de ces deux arcs.*

Car soit du centre *F*, & du rayon *FB*, décrit un arc de cercle qui coupe la corde *BG* prolongée, s'il est necessaire, au point *H*, pour avoir une triangle isoscelle *BFH*, qui sera semblable au triangle isoscelle *BCD*; puisque l'angle *FBH* a pour mesure la moitié de l'arc *FG* égal à l'arc *AD*, dont la moitié est aussi la mesure de l'angle *CBD*. On aura donc *FB*. *BH* :: *CB*. *BD*, de sorte qu'il ne reste qu'à démontrer que la ligne *BH* est la somme des deux cordes *BE*, *BG*, dans le premier cas, & leur difference dans le second. Pour le faire.

Soient tirées les cordes *EF*, *FG*, & on aura deux triangles *BEF*, *FHG*, qui seront semblables & égaux. Car dans le premier cas l'angle *FHB* ou *FHG*, est égal à l'angle *FBH* qui vaut l'angle *FBE*, puisque les arcs *FG*, *FE*, sont égaux; & de plus l'angle *BEF* est égal à l'angle *FGH*, puisqu'ils ont chacun pour mesure la moitié du même arc *BF*; & partant l'angle *GFH* est égal à l'angle *EFB*. Or les côtés *FE*, *FG*, & *FB*, *FH*, sont égaux entr'eux. Le côté *GH* sera donc égal au côté *BE*. Donc &c. FIG CCLXVI.

On prouvera à peu près de même dans le second cas que les triangles *FHG*, *FBE*, sont semblables & égaux; & qu'ainsi la ligne *BH* est la difference des deux cordes *BG*, *BE*. FIG. CCLXVII. CCLXVIII.

LEMME II.

443. *SOIT une Table dont le premier rang parallele renfermant le nombre* 2, *& le second la lettre* x; *le troisiéme* xx — 2 *soit le produit du second par* x, *moins le premier; le quatriéme* x^3 — 3x *soit le produit du troisiéme par* x, *moins le second, le cinquiéme* x^4 — 4xx + 2 *soit le produit du quatriéme par* x, *moins le troisiéme, & ainsi de suite à l'infini. Soit de plus un arc de cercle quelconque* AR *divisé en autant de parties égales qu'on voudra, aux points* D, E, F, G, *&c. Je dis que si le premier rang* 2 *de la Table exprime la valeur du diametre* BA, *& le second rang* x *celle de la premiere corde* BD, *le troisiéme rang* xx — 2 *exprimera la valeur de la seconde corde* BE, *le quatriéme rang* x^3 — 3x *celle de la troisiéme corde* BF, *&* FIG CCLXIX. CCLXX.

ainsi de suite jusqu'à la derniere BR : *en observant que ces cordes deviennent negatives, lorsqu'elles passent de l'autre côté du point* B.

Table pour la division des arcs de cercle en parties égales.

1er	2
2^{e}	$1x$
3^{e}	$1xx - 2$
4^{e}	$1x^3 - 3x$
5^{e}	$1x^4 - 4xx + 2$
6^{e}	$1x^5 - 5x^3 + 5x$
7^{e}	$1x^6 - 6x^4 + 9xx - 2$
8^{e}	$1x^7 - 7x^5 + 14x^3 - 7x$
9^{e}	$1x^8 - 8x^6 + 20x^4 - 16xx + 2$
10^{e}	$1x^9 - 9x^7 + 27x^5 - 30x^3 + 9x$
11^{e}	$1x^{10} - 10x^8 + 35x^6 - 50x^4 + 25xx - 2$
12^{e}	$1x^{11} - 11x^9 + 44x^7 - 77x^5 + 55x^3 - 11x$
13^{e}	$1x^{12} - 12x^{10} + 54x^8 - 112x^6 + 105x^4 - 36xx + 2$
14^{e}	$1x^{13} - 13x^{11} + 65x^9 - 156x^7 + 182x^5 - 91x^3 + 13x$

FIG. CCLXIX. Car 1°. Lorsque l'arc *AR* est moindre que la demie circonference *ADB*; si l'on multiplie une corde quelconque *BF* par *x*; & qu'on retranche de ce produit la corde *BE* qui la precede, on aura la corde *BG* qui la suit immédiatement, puisque selon le Lemme precedent *CB* (1) . *BD* (*x*) :: *BF* . *BE* + *BG* = *x BF*, & partant *BG* = *xBF* — *BE*. Donc &c.

FIG. CCLXX. 2°. Lorsque l'arc *AR* est plus grand que la demie circonference *ADB*; il est visible que l'origine commune *B* de toutes les cordes se trouvera necessairement sur l'une des parties égales comme *GH*, dans lesquelles l'arc *AR* est divisé. Or l'on prouvera comme dans le premier cas que le troisiéme rang de la Table exprime la valeur de *BE*, le quatriéme celle de *BF*, & ainsi de suite jusqu'à *BG* : mais il reste à démontrer que le rang qui suit celui qui exprime la corde *BG*, n'exprimera point la valeur de + *BH*, mais celle de — *BH*; & de même que le rang qui suit ce dernier exprime la valeur de — *BI*, & ainsi de suite jusqu'à — *BR*.

Selon la formation de la Table, le rang qui suit celui qui exprime *BG* est *xBG* — *BF*. Or par le Lemme *CB* (1) . *BD* (*x*) :: *BG* . *BF* — *BH*, & partant — *BH* = *xBG* — *BF*, c'est à dire que — *BH* vaut le rang parallele de la Table qui

suit immédiatement celui qui exprime la valeur de BG. Mais selon la formation de la même Table, le rang qui suit celui qui vaut $- BH$ est $- xBH - BG$ valeur de BI, puisque selon le Lemme $xBH = BI - BG$: & de même le rang qui suit celui qui vaut $- BI$ est selon la formation de cette même Table $- xBI + BH$ valeur de la corde negative $- BL$, puisque selon le Lemme $xBI = BL + BH$. Or il est visible qu'il en est de même de toutes les cordes qui suivent BL jusqu'à BR ; & c'est ce qui restoit à démontrer.

COROLLAIRE I.

444. DE-LA il est évident que si l'arc AR est divisé en cinq parties égales, le sixiéme rang de la Table $x^5 - 5x^3 + 5x$ exprimera la valeur de la corde BR qui soutend l'arc BR difference de l'arc AR & de la demie circonference ADB ; que s'il étoit divisé en sept parties égales, le huitiéme rang seroit la valeur de B[illegible] ; & en general qu'il faut augmenter d'une unité le nombre des parties égales, afin d'avoir le rang de la Table qui vaut BR : en observant que le rayon $CB = 1$, que la premiere corde $BD = x$, & que la derniere corde BR est negative lorsque l'arc AR est plus grand que la demie circonference. FIG. CCLXIX CCLXX.

COROLLAIRE II.

445. ON voit par la composition de cette Table, 1°. Que le nombre 2 est le premier terme de chaque rang perpendiculaire. 2°. Que les coëficiens de tous les autres termes du premier rang perpendiculaire sont égaux à l'unité. 3°. Que le coëficient d'un terme quelconque de tel rang perpendiculaire qu'on voudra, est toujours égal au coëficient d'un pareil terme dans le rang perpendiculaire à gauche, plus au coëficient du terme qui est au dessus de lui : c'est à dire, par exemple, que le coëficient 14. du quatriéme terme $14x^3$ du troisiéme rang perpendiculaire, est égal au coëficient 5 du quatriéme terme $5x^3$ du deuxiéme rang perpendiculaire qui est le rang à gauche, plus au coëficient 9 du terme $9xx$ qui est au dessus du terme $14x^3$.

REMARQUE.

446. SI l'on continuoit à diviser la circonference en parties égales
FIG. CCLXX. aux arcs AD, DE, &c. au-delà du point R; il est clair que les rangs paralleles de la Table qui suivent celui qui exprime $-BR$ continuëroient à exprimer par ordre toutes les cordes négatives qui suivroient BR, jusqu'à ce que repassant le point B elles redeviendroient encore négatives; & ainsi de suite alternativement positives & negatives, autant de fois qu'elles passeroient le point B jusqu'à l'infini.

EXEMPLE LI.

447. COUPER un arc de cercle donné AR, en autant de parties égales AD, DE, EF, FG, &c. qu'on voudra.

FIG. CCLXIX. CCLXX. Ayant mené le diametre AB & la corde BR, & nommé le rayon donné CA ou CB, 1; la corde donnée BR, a; on formera une égalité dont le premier membre sera le rang parallele de la Table qui surpasse d'une unité le nombre des parties égales, & le second sera $\mp a$; sçavoir $+a$ lorsque l'arc AR est moindre que la demie circonference, & $-a$ lorsqu'il est plus grand. Or il est visible, selon l'article 443. que la resolution de cette égalité doit fournir pour l'une de ses racines x, une valeur BD telle qu'ayant décrit du point B comme centre & de l'intervalle BD un arc de cercle, il coupera sur l'arc donné AR la premiere des parties égales cherchées AD.

Qu'il faille, par exemple, diviser l'arc donné AR en trois parties égales; on trouvera $x^3 - 3x = \mp a$, dont l'une des racines BD terminera la premiere des trois parties égales qu'on demande. S'il falloit diviser l'arc AR en cinq parties égales, on auroit $x^5 - 5x^3 + 5x = \mp a$, & de même, s'il falloit diviser en sept, il viendroit $x^7 - 7x^5 + 14x^3 - 7x = \mp a$: de sorte que toute la difficulté se reduit à trouver les racines de ces égalités. Or c'est ce qu'on a enseigné dans le Livre precedent. Donc &c.

Il est à remarquer que ces égalités sont les plus simples qu'il est possible, lorsque le nombre des parties égales est un nombre premier. Mais lorsqu'il est composé de deux ou plusieurs nombres premiers, on divisera d'abord l'arc donné en autant

de parties égales que l'un de ces nombres a d'unités, & ensuite la premiere de ces parties en autant de parties égales que l'un des nombres restans a d'unités, & ainsi de suite jusqu'à ce qu'on ait épuisé tous les nombres premiers, dont le produit forme le nombre donné; ce qui donnera enfin la premiere des parties égales qu'on cherche : si l'on veut, par exemple, diviser l'arc *AR* en trente parties égales, il faudra d'abord le diviser en cinq, ensuite la premiere de ces cinq parties en trois, & enfin la premiere de ces trois en deux, pour avoir la trentiéme partie qu'on demande, & cela parce que $30 = 5 \times 3 \times 2$.

REMARQUE I.

448. DEUX points donnés *A*, *R*, sur la circonference d'un cercle en déterminent non seulement deux arcs, dont l'un *AR* est moindre que la demie circonference, & l'autre *ABR* plus grand; mais encore une infinité de portions, dont les unes sont la circonference entiere plus l'arc *AR*, deux fois la circonference plus l'arc *AR*, trois fois la circonference plus l'arc *AR* &c. & les autres sont la circonference entiere plus l'arc *ABR*, deux fois la circonference plus l'arc *ABR*, trois fois la circonference plus l'arc *ABR* &c; dont la raison est que la circonference d'un cercle rentrant en elle-même, on peut considerer cette ligne courbe comme faisant une infinité de revolutions autour d'elle même. Si donc l'on nomme l'arc *AR*, d; la circonference entiere c; l'arc *ABR* sera $c - d$ & l'on aura ces deux suites. FIG. CCLXX. CCLXXI. CCLXXII. &c.

1°. $d, c+d, 2c+d, 3c+d, 4c+d, 5c+d, 6c+d, 7c+d, 8c+d,$ &c.
2°. $c-d, 2c-d, 3c-d, 4c-d, 5c-d, 6c-d, 7c-d, 8c-d,$ &c.

qui expriment par ordre toutes les portions de circonferences terminées par les deux points *A*, *R*. Cela posé.

Si l'arc *AD* est une aliquote quelconque de l'arc *AR* moindre que la demie circonference; & qu'ayant inscrit dans le cercle un poligone *DEFGH* &c. d'un pareil nombre de côtés à commencer par le point *D*, on tire de l'extremité *B* du diametre *AB* aux angles du poligone les cordes *BD*, *BF*, *BG*, *BH*, &c. je dis qu'elles terminent des aliquotes pareilles de tous les termes de ces deux suites, dont l'origine fixe est toujours au point *A*.

Car soit pour fixer les idées l'arc $AD = \frac{1}{5}d$; il est clair FIG. CCLXXI.

que l'arc $ADE = \frac{c+d}{5}$, l'arc $ADEF = \frac{2c+d}{5}$, l'arc $ADEFG = \frac{3c+d}{5}$ l'arc $ADEFGH = \frac{4c+d}{5}$ qui ſont les 5[es] parties ou les aliquotes pareilles des cinq premiers termes de la premiere ſuite. Or ſi l'on diviſe tel autre de ſes termes qu'on voudra par 5, il eſt viſible que le quotient renferme au juſte un certain nombre de fois la circonference entiere plus une des cinq fractions precedentes. Donc puiſque la corde qui termine un arc, dont l'origine eſt en A, eſt la même que celle qui termine cet arc plus la circonference repetée autant de fois qu'on veut, il s'enſuit que les cordes BD, BE, BF, BG, BH, terminent les cinquiémes parties de tous les termes de la premiere ſuite. On prouvera de la même maniere que les arcs AH, AHG, $AHGF$, $AHGFE$, $AHGFED$ ſont les cinquiémes parties des cinq premiers termes de la ſeconde ſuite, & qu'ainſi les cordes BH, BG, BF, BE, BD, terminent les cinquiémes parties de tous les termes de la ſeconde ſuite. Mais il eſt viſible que cette démonſtration ſe peut appliquer à telle autre aliquote qu'on voudra de l'arc AR. Donc &c.

FIG. CCLXXIII. CCLXXIV. De-là il ſuit que ſi l'on réünit les deux ſuites precedentes en une ſeule d, $c \mp d$, $2c \mp d$, $3c \mp d$ &c; les deux cordes voiſines de part & d'autre de la plus grande ou premiere BD qui termine l'aliquote AD de l'arc AR moindre que la demie circonference, termineront des aliquotes pareilles du ſecond terme $c \mp d$ de la ſuite; que les deux cordes voiſines de celles-ci termineront des aliquotes pareilles du troiſiéme terme $2c \mp d$ de la ſuite; & ainſi à l'infini de deux en deux juſqu'aux dernieres lorſque l'aliquote eſt impaire, & juſqu'à la derniere lorſqu'elle eſt paire. Ainſi lorſque l'arc $AD = \frac{1}{5} AR$; les cordes BE, BH, terminent les deux arcs ADE, AH, cinquiémes parties du ſecond terme $c \mp d$ de la ſuite, c'eſt à dire de la circonference plus l'arc AR, & de la circonference moins cet arc; les deux cordes BF, BG, voiſines de celles-ci termineront deux arcs $ADEF$, AHG, qui ſont les cinquiémes parties du troiſiéme terme $2c \mp d$ de la ſuite: & de même lorſque l'arc $AD = \frac{1}{6} AR$; les deux cordes BE, BK, voiſines de part & d'autre de la premiere ou plus grande BD terminent les deux arcs ADE, AK, qui ſont les ſixiémes parties du ſecond terme $c \mp d$; les deux cordes BF, BH, voiſines de ces deux-ci terminent les deux arcs $ADEF$, AKH, ſixiémes parties du troiſiéme terme $2c \mp d$;

& enfin la derniere corde BG termine les deux arcs $ADEFG$, $AKHG$, sixiémes parties du quatriéme terme $3c \mp d$.

On entend dans les remarques suivantes par *cordes impaires*, celles qui étant prises de part & d'autre de la premiere ou plus grande BD, se trouvent dans les lieux impairs à commencer par cette plus grande ; & par *cordes paires*, celles qui étant prises de part & d'autre de la même BD, se trouvent dans des lieux pairs. Ainsi lorsque l'arc $AD = \frac{1}{5} AR$; les cordes BD, BF, BG, sont des cordes impaires, & les cordes BE, BH, des cordes paires: & de même lorsque l'arc $AD = \frac{1}{6} AR$; les cordes BD, BF, BH, sont des cordes impaires, & les côtés BE, BK, BG, sont des cordes paires.

REMARQUE II.

449. Si l'arc AD est une aliquote quelconque de l'arc AR moindre que la demie circonference ARB; & qu'ayant inscrit dans le cercle à commencer par le point D, un poligone $DEFGH$ &c. d'un pareil nombre de côtés, on tire de l'extremité B du diametre AB aux angles du poligone les cordes BD, BE, BF, BG, BH &c: je dis que les cordes impaires lorsque l'arc AD est une aliquote impaire de l'arc AR, & leurs quarrés lorsqu'il en est une aliquote paire, expriment les racines vraies de l'égalité qu'on trouve en égalant à la grandeur positive $+a$, le rang parallele de la Table dont l'exposant surpasse d'une unité le nombre des côtés du poligone; & que les cordes paires dans le premier cas, & leurs quarrés dans le second, expriment les racines vraies de l'autre égalité qu'on trouve en égalant à la grandeur negative $-a$, le même rang parallele de la Table. FIG. CCLXXIII. CCLXXIV.

Soit, par exemple, l'arc $AD = \frac{1}{5} AR$; je dis que les cordes impaires BD, BF, BG, sont les racines vraies de l'égalité $x^5 - 5x^3 + 5x = a$, & que les cordes paires BE, BH, sont les racines vraies de l'autre égalité $x^5 - 5x^3 + 5x = -a$. Si l'arc $AD = \frac{1}{6} AR$; les quarrés des cordes impaires BD, BF, BH, seront les racines vraies de l'égalité $x^6 - 6x^4 + 9xx - 2 = a$, & les quarrés des cordes paires BE, BK, BG, seront les racines vraies de l'autre égalité $x^6 - 6x^4 + 9xx - 2 = -a$. FIG. CCLXXI. CCLXXIII. FIG. CCLXXII. CCLXXIV.

Car si l'on propose de diviser la circonference entiere repe-

tée un certain nombre de fois plus ou moins l'arc *AR*, en parties égales dont la premiere soit moindre que la demie circonference, il est clair selon l'article 444. qu'on formera la même Table que pour la division de l'arc *AR*: en observant que les cordes doivent changer necessairement une fois de signe (avant que d'arriver à la derniere *BR*) lorsque la circonference n'est repetée qu'une fois, par ce que l'origine commune *B* de toutes se trouve sur l'une des parties égales; que les cordes doivent changer deux fois de signes, lorsque la circonference est repetée deux fois, parce que l'origine *B* se trouve necessairement sur deux des parties égales; qu'elles doivent changer trois fois, lorsque la circonference est repetée trois fois, parce que l'origine *B* se trouve sur trois parties égales, & ainsi de suite. La corde *BR* sera donc positive lorsqu'il s'agit de diviser en parties égales l'arc *AR* & la circonference repetée un nombre pair de fois plus ou moins l'arc *AR*; & negative lorsque la circonference est repetée un nombre impair de fois: c'est à dire que dans le premier cas on doit égaler le rang parallele de la Table à la grandeur positive $+a$. Et par consequent les cordes impaires ou leurs quarrés seront les racines vraies de l'autre égalité dont l'un des membres est $-a$. *Ce qu'il falloit, &c.*

REMARQUE III.

450. Fig. CCLXXI. CCLXXIII. LES mêmes choses étant posées, si l'arc *AD* est une aliquote impaire de l'arc *AR*; il est clair par l'inspection de la Table, que tous les termes pairs, c'est à dire, le deuxiéme, quatriéme, sixiéme, &c, excepté le dernier terme *a*, manquent toujours dans les deux égalités qu'on trouve selon la remarque precedente. Or l'on sçait en Algebre, qu'en changeant de signes les termes pairs d'une égalité, on ne fait qu'en changer les racines vraies en fausses & les fausses en vraies. D'où il suit que les cordes paires qui sont des racines vraies de l'égalité dont l'un des membres est $-a$, deviendront des racines fausses de l'autre égalité dont l'un des membres est $+a$. Par exemple, si l'arc $RD = \frac{1}{5} AR$; les cordes impaires *BD*, *BF*, *BG*; seront les racines vraies de l'égalité $x^5 - 5x^3 + 5x = a$, & les cordes paires *BE*, *BH*, en seront les racines fausses.

On peut tirer de ces deux dernieres Remarques plusieurs Theorêmes

Theorêmes la plûpart entierement nouveaux, touchant l'inscription des poligones reguliers; si l'on fait attention que la grandeur connuë du second terme d'une égalité renferme la somme de ses racines, que celle du troisiéme terme renferme la somme des plans alternatifs de ses racines, que celle du quatriéme terme renferme la somme des solides alternatifs &c, & enfin que le dernier terme est égal au produit de toutes les racines les unes par les autres. J'en mettrai ici quatre des principaux, après avoir fait la Remarque suivante qui peut être de quelque utilité.

REMARQUE IV.

451. LES mêmes choses étant posées que dans la Remarque precedente, où l'on veut que l'aliquote *AD* de l'arc *AR* soit impaire; je dis qu'entre les cordes renfermées dans la demie circonference *ARB* qui contient l'arc *AR*, la derniere ou plus petite *BF* soûtend un arc *BF* qui est à l'arc *BR*, en même raison que l'arc *AD* à l'arc *AR*. FIG.CCLXXI. CCLXXIII.

Car soit l'arc *AD* la cinquiéme partie de l'arc *AR*, & par consequent l'arc *DE* la cinquiéme partie de la circonference; il est clair que la demie circonference *ARB* contiendra deux fois & demie l'arc *DE*, c'est à dire, deux fois l'arc *DE* ou bien l'arc *DEF* plus la cinquiéme partie de la demie circonference. Donc l'arc *AD* plus l'arc *BF* vaut la cinquiéme partie de la demie circonference *ARB*. Donc puisque *AD* est la cinquiéme partie de l'arc *AR*, il s'ensuit que *BF* sera aussi la cinquiéme partie de l'arc *BR* complement à deux droits de l'arc *AR*. Mais ce que l'on vient de démontrer subsiste avec la même force, soit que l'arc *AD* soit la cinquiéme partie de l'arc *AR*, ou bien une autre aliquote quelconque impaire. On a donc eu raison de dire en general &c.

De-là on voit que si l'on nomme *b* la corde *BR* d'un arc quelconque *BR* moindre que la demie circonference, dont le rayon est 1; & que l'on forme une égalité dont l'un des membres soit *b*, & l'autre le rang parallele de la Table qui surpasse d'une unité le nombre des parties égales dans lesquelles l'arc *BR* doit être divisé: cette égalité aura pour l'une de ses racines la corde *BF* de la premiere de ses parties, & par consequent pour une autre de ses racines, la corde *BG* de la pre-

miere d'un pareil nombre de parties égales de l'arc *BAR* complement à quatre droits de l'arc *BR*.

THEORESME I.

452. *S'Il l'on inscrit au dedans d'un cercle un poligone regulier quelconque* DEFGH &c. *d'un nombre impair de côtés ; & qu'on tire d'un point quelconque* B *de la circonference à tous les angles du poligone des cordes* BD, BE, BF, BG, BH, &c. *je dis*.

Fig. CCLXXI.

1°. *Que la somme des cordes impaires* BD, BF, BG &c, *à commencer par la plus grande* BD *sera toûjours égale à la somme des cordes paires* BE, BH &c; *c'est à dire que la plus petite corde* BF — BE + BD — BH + BG &c = 0.

Car menant le diametre *BA*, & prenant l'arc *AR* qui contienne l'arc *AD* autant de fois que le poligone a de côtés, il est clair comme l'on vient de voir que si l'on nomme la corde *BR*, *a*; & le rayon *CA* ou *CB*, 1; les cordes impaires *BD*, *BF*, *BG &c*, seront les racines vraies, & les cordes paires *BE*, *BH&c*, les racines fausses de l'égalité qui a pour l'un de ses membres + *a*. Or puisque le second terme, qui selon qu'on démontre en Algebre contient la somme des racines, manque toûjours dans cette égalité; il s'ensuit &c.

2°. *Que si l'on mene le diametre* BA, *& qu'ayant pris l'arc* AD *autant de fois que le poligone a de côtés, on tire la corde* BR : *le produit* BD × BE × BF × BG × BH &c *de toutes les cordes* BD, BE, BF, BG, BH &c *les unes par les autres, sera toujours égal au produit de la corde* BR *par une puissance du rayon* CA *qui ait pour exposant le nombre des cordes* — 1.

Car ce dernier produit vaut le membre *a*; puisque *BR* = *a*, & qu'on prend dans la Table pour l'unité le rayon *CA*. Or comme le terme *a* est toûjours le dernier terme de l'égalité qui a pour ses racines toutes les cordes *BD*, *BE*, *BF*, *BG*, *BH &c*, & que le dernier terme d'une égalité contient toûjours selon ce qu'on démontre en Algebre le produit de toutes ses racines : il s'ensuit &c.

THEORESME II.

453. *Si l'on divise une demie circonference* AEB *en un nombre quelconque impair de parties égales, dont les deux premieres soient l'arc* AE, *les quatre premieres l'arc* AEF, *& ainsi de suite de deux en deux jusqu'à la derniere; & qu'on tire les cordes* BE, BF &c: *je dis,* FIG. CCLXXIII.

1°. *Que la premiere de ces cordes* BE, *moins la seconde* BF, *plus la troisiéme, moins la quatriéme &c. jusqu'à la derniere inclusivement; est toujours égale au rayon.*

2°. *Que le produit* BE × BF &c. *de toutes les cordes les unes par les autres, est égal à une puissance convenable du rayon. Ainsi dans cet exemple où le nombre des divisions est* 5, *& où il n'y a par consequent que deux cordes* BE, BF; *on aura* 1°, $BE - BF = CA$. 2°. $BE \times BF = \overline{CA}^2$.

Car inscrivant dans le cercle entier le poligone regulier *EFGH* dont le nombre des côtés soit égal au nombres des divisions à commencer par le point *A*; & tirant de l'autre extremité *B* du diametre *AB* à tous les angles de ce poligone des cordes *BD*, *BE*, *BH*, *BF*, *BG*, *&c*; il est clair 1°. Que la plus grande de ces cordes *BD* est égale au diametre *BA*, & qu'ainsi l'arc *AD* étant nul ou zero, l'arc *AR* le sera aussi; d'où l'on voit que la corde *BR* sera aussi égale au diametre *BA*. 2°. Que les cordes *BE*, *BH*, *BF*, *BG &c*, étant prises deux à deux sont égales entr'elles. Or cela posé, si l'on applique le Theorême precedent à ce cas particulier on en verra naître celui-ci. Donc &c.

THEORESME III.

454. *Si l'on inscrit au dedans d'un cercle un poligone regulier quelconque* DEFGHK &c, *dont le nombre des côtés soit pair; & que d'un point quelconque* B *de la circonference, on tire à tous les angles de ce poligone des cordes* BD, BE, BF, BG, BH, BK &c.: *je dis,* FIG. CCLXXII.

1°. *Que la somme tant des quarrés des cordes impaires* BD, BF, BH, *que des cordes paires* BE, BG, BK, *est égale au quarré du rayon* CB *pris autant de fois que le poligone a de côtés.*

Car menant le diametre *BA*, & prenant l'arc *AR* qui contienne l'arc *AD* autant de fois que le poligone a de côtés; il est clair * qu'en nommant la corde *BR*, *a*; & le rayon *CA* ou *CB*, 1; les quarrés des cordes impaires *BD*, *BF*, *BH &c*, feront les racines vraies de l'égalité dont l'un des membres est $+ a$; & que les quarrés des cordes paires *BE*, *BK*, *BG &c*, feront les racines vraies de l'autre égalité dont l'un des membres est $- a$. Or le coëficient du second terme de chacune de ces deux égalités qui contient la somme de leurs racines, est toûjours égal au quarré du rayon pris autant de fois que le poligone a de côtés, comme l'on voit dans la Table. Donc &c.

* Art. 449.

2°. *Que si l'on mene le diametre* BA; *& qu'ayant pris l'arc* AR *qui contienne autant de fois l'arc* AD *que le poligone a de côtés, on tire la corde* BR: *le produit* $\overline{BD}^2 \times \overline{BF}^2 \times \overline{BH}^2$ &c. *des quarrés des cordes impaires, est égal au produit de* $BA \mp BR$ *par une puissance convenable du rayon, sçavoir* $BA + BR$ *lorsque le nombre des côtés du poligone est simplement pair, &* $BA - BR$ *lorsqu'il est pairement pair, c'est à dire, divisible par 4; & le produit* $\overline{BE}^2 \times \overline{BG}^2 \times \overline{BK}^2$ &c. *des cordes paires, est égal au produit de* $BA \pm BR$ *par la même puissance du rayon, sçavoir* $BA - BR$ *dans le premier cas &* $BA + BR$ *dans le second.*

Car nommant *BR*, *a*; & le rayon *CA*, 1; il est clair que les quarrés des cordes impaires *BD*, *BF*, *BH &c*, sont les racines d'une égalité qui a toûjours pour dernier terme $2 \mp a$, c'est-à-dire $BA \mp BR$; & de plus que les quarrés des cordes paires *BR*, *BG*, *BK &c*, sont les racines de l'autre égalité qui a toûjours pour dernier terme $2 \pm a$, c'est-à-dire $BA \pm BR$. Or comme le dernier terme d'une égalité contient toûjours le produit de toutes ses racines, il s'ensuit &c.

COROLLAIRE.

455. DE-LA il est évident 1°. Que la somme des quarrés de toutes les cordes tant paires qu'impaires, est égal au quarré du rayon multiplié par le double du nombre des côtés du poligone, c'est à dire ici que $\overline{BF}^2 + \overline{BE}^2 + \overline{BD}^2 + \overline{BK}^2 + \overline{BH}^2 + \overline{BG}^2 = 12\,\overline{CA}^2$. 2°. Que la difference de quarrés des cordes impai-

res avec les quarrés des cordes paires, eſt toûjours égale à zero, c'eſt à dire, que $\overline{BF}^2 - \overline{BE}^2 + \overline{BD}^2 - \overline{BK}^2 + \overline{BH}^2 - \overline{BG}^2 = 0$. 3°. Que le produit des quarrés des cordes impaires plus celui des quarrés des cordes paires, eſt égal au quadruple d'une puiſſance pareille du rayon; c'eſt à dire, que $\overline{BF}^2 \times \overline{BD}^2 \times \overline{BH}^2 + \overline{BE}^2 \times \overline{BK}^2 \times \overline{BG}^2 = 4\,\overline{CA}$. 4°. Que la difference de ces deux produites, eſt égale au double de la corde BR multipliée par une puiſſance convenable du rayon; en obſervant que le produit du quarré des cordes impaires, ſurpaſſe celui des quarrés des cordes paires, lorſque le nombre des côtés du poligone eſt ſimplement pair, & au contraire qu'il eſt moindre, lorſqu'il eſt pairement pair : c'eſt à dire ici, que $\overline{BF}^2 \times \overline{BD}^2 \times \overline{BH}^2 - \overline{BR}^2 \times \overline{BK}^2 \times \overline{BG}^2 = 2BR \times CA^5$. 5°. Que le produit des quarrés de toutes les cordes tant paires qu'impaires les uns par les autres ſera toûjours égal au produit de $\overline{BA}^2 - \overline{BR}^2 = BA \mp BR \times BA \pm BR = \overline{AR}^2$ à cauſe de l'angle droit ARB, par une puiſſance convenable du rayon : c'eſt à dire en extrayant de part & d'autre les racines quarrées; que le produit de toutes les cordes eſt égal au produit de la corde AR par une puiſſance du rayon moindre d'une unité que le nombre des cordes; par exemple ici, $BF \times BE \times BD \times BK \times BH \times BG = AR \times CA^5$.

THEOREME IV.

456. *SI l'on diviſe une demie circonference* ADB *en un nombre quelconque pair de parties égales, dont la premiere ſoit l'arc* AD, *les trois premieres l'arc* ADE, *les cinq premieres l'arc* ADEF, *& ainſi de ſuite de deux en deux juſqu'à la derniere ; & qu'on tire les cordes* BD, BE, BF &c. *je dis,* FIG. CCLXXI.

1°. *Que la ſomme des quarrés de ces cordes eſt égale au quarré du rayon pris autant de fois qu'il y a de diviſions. C'eſt à dire ici, où le nombre des diviſions eſt 6, que* $\overline{BD}^2 + \overline{BE}^2 + \overline{BF}^2 = 6\,\overline{CA}^2$.

2°. *Que le produit des quarrés des ces cordes les uns par les autres, vaut le double de la puiſſance convenable du rayon Ainſi* $\overline{BD}^2 \times \overline{BE}^2 \times \overline{BF}^2 = 2\,CA^6$, *& par conſequent* $BD \times BE \times BF = CA^3 \times \sqrt{2}$.

Car inſcrivant dans le cercle entier un poligone regulier *DEFGHK*, dont le nombre des côtés ſoit égal au nombre des diviſions, à commencer par la premiere *D*; & tirant de l'extremité *B* du diametre *AB*, à tous les angles de ce poligone, des cordes *BD*, *BK*, *BE*, *BH*, *BF*, *BG* : il eſt clair que les cordes *BD*, *BK*, *BE*, *BH*, *BF*, *BG*, &c. étant priſes deux à deux ſont égales entr'elles; & partant que ſi l'on applique les articles premier & troiſiéme du Corollaire precedent à ce cas particulier, on en verra naître ce Theorême.

EXEMPLE XII.

457. INSCRIRE dans un cercle donné, un poligone regulier quel-
Fig. CCLXXV. conque; dont le nombre des côtés ſoit donné.

On peut regarder ce Problême, comme n'étant qu'un cas particulier de l'Exemple precedent. Car ſi l'on ſuppoſe que la corde *BR* devienne nulle ou zero, il s'enſuit que l'arc *AR* qu'elle termine deviendra la demie circonference. Or ſi l'on propoſe de diviſer la circonference entiere en un nombre quelconque de parties égales; il eſt évident qu'en diviſant la demie circonference dans ce même nombre, & prenant la ſeconde corde au lieu de la premiere, elle terminera la premiere des parties demandées. Par exemple, ſi l'on diviſe la demie circonference
Fig. CCLXXVI. *ADB* en ſept parties égales *AD*, *DE*, *EF*, *FG*, *GH*, *HI*, *IB*; la ſeconde corde *BE* terminera l'arc *AE* qui eſt la ſeptiéme partie de la circonference entiere. D'où l'on voit qu'en égalant à zero le rang parallele de la Table qui ſurpaſſe d'une unité le nombre des côtés du poligone, on formera une égalité dont la plus grande des racines x exprimera la valeur de la corde *BD* qui termine
* Art. 442. l'arc *AD* moitié de l'arc cherché *AE*. Mais * $CB(1) . BD(x) :: BD(x) . BE + BA$, & par conſequent ſi l'on nomme z la ſeconde corde *BE*, on aura $xx = z + 2$. Si donc l'on fait évanoüir par le moyen de cette égalité l'inconnuë x dans la precedente, on en formera une nouvelle dont la plus grande racine z exprimera la corde *BE* qui termine l'arc cherché *AE*. Ainſi dans nôtre exemple, en égalant à zero le huitiéme rang parallele & diviſant par x, je trouve cette égalité $x^6 - 7x^4 + 14xx - 7 = 0$, dans laquelle mettant à la place de xx ſa valeur $z + 2$, à la place de x^4 le quarré de cette valeur &c. je la change en cette autre $z^3 - zz - 2z + 1 = 0$, dont la plus grande des racines z ex-

prime la valeur de la corde *BE* qui termine l'arc *AE* feptiéme partie de la circonference entiere.

Voici maintenant une maniere generale de trouver immédiatement toutes ces égalités lorfque le nombre des côtés du poligone eft impair qui eft le feul cas neceffaire; puifque s'il étoit pair, on le reduiroit toûjours en le divifant par 2, autant de fois qu'il feroit poffible, en un nombre impair dans lequel ayant partagé la circonference, on auroit par la biffection d'une des parties égales, réïterée autant qu'il feroit neceffaire, l'arc qu'on demande.

Soit conftruite une Table dans laquelle le premier rang parallele étant 1, & le fecond $z - 1$; le troifiéme $zz - z - 1$ foit égal au produit du fecond par z, moins le premier; le quatrieme $z^3 - zz - 2z + 1$ foit égal au produit du troifiéme par z, moins le fecond; & ainfi à l'infini. Soit formée une égalité dont l'un des membres étant zero, l'autre foit le rang parallele de la Table, qui ait pour expofant la plus grande moitié du nombre des côtés du poligone. Je dis que la plus grande des racines z de cette égalité, terminera un arc qui aura pour corde, le côté cherché du poligone.

Table pour l'infcription des poligones reguliers dans le cercle.

1er	1
2^{e}	$z - 1$
3^{e}	$zz - z - 1$
4^{e}	$z^3 - zz - 2z + 1$
5^{e}	$z^4 - z^3 - 3zz + 2z + 1$
6^{e}	$z^5 - z^4 - 4z^3 + 3zz + 3z - 1$
7^{e}	$z^6 - z^5 - 5z^4 + 4z^3 + 6zz - 3z - 1$
8^{e}	$z^7 - z^6 - 6z^5 + 5z^4 + 10z^3 - 6zz - 4z + 1$
9^{e}	$z^8 - z^7 - 7z^6 + 6z^5 + 15z^4 - 10z^3 - 10zz + 4z + 1$
10^{e}	$z^9 - z^8 - 8z^7 + 7z^6 + 21z^5 - 15z^4 - 20z^3 + 10zz + 5z - 1$

Qu'il faille, par exemple, infcrire dans un cercle un heptagone. Je prends le quatriéme rang parallele de la Table, parce que 4 eft la plus grande moitié de 7, & l'égalant à zero j'ai $z^3 - zz - 2z + 1 = 0$, dont la plus grande racine z exprimera la valeur de la corde *BE*, qui termine l'arc *AE* feptiéme partie de la circonference entiere; pour le prouver.

Soit un arc de cercle *AR* moindre que la demie circonference divifé en un nombre quelconque impair, de parties égales FIG. CCLXXV.

aux points *D*, *E*, *F*, *G* &c: & soient menées de l'extremité *B* du diametre *BA* les cordes *BD*, *BE*, *BF*, *BG* &c, jusqu'à la derniere *BR*. Ayant pris l'arc *AS* égal à l'arc *AD*, soit tirée la corde *BS*, & soient nommées la premiere corde *BD* ou *BS*, x; & la seconde *BE*, z. Cela posé, on aura selon le Lemme $CB\ (1).\ BE\ (z) :: BD\ (x).\ BF + BS$. Et par consequent $BF = xz - x$. De même $CB\ (1).\ BE\ (z) :: BD\ (x).\ BF + BS$. Et par consequent $BF = xz - x$. De même $CB\ (1).\ BE\ (z) :: BF.\ BD + BH$. Et par consequent $BH = z\,BF - BD$; de même encore $CB\ (1).\ BE\ (z) :: BH.\ BF + BR$, & partant $BR = z\,BH - BF$: c'est-à dire, que la cinquiéme corde *BH* est égale au produit de la troisiéme *BF* par z, moins la premiere *BD*; que la septiéme *BR* est égale au produit de la cinquiéme *BH* par z, moins la troisiéme *BF*; & ainsi à l'infini de toutes les cordes impaires. D'où l'on voit que si l'on construit une Table dont le premier rang étant x, & le second $xz - x$; le troisiéme $xzz - xz - x$ soit égal au produit du second par z, moins le premier; le quatriéme $xz^3 - xzz - 2xz + 1$ soit égal au produit du troisiéme par z moins le second; & ainsi à l'infini: les rangs de cette Table exprimeront par ordre toutes les cordes impaires *BD*, *BF*, *BH*, *BR*, de l'arc *AR*. Or les rangs de cette Table n'étant autres que ceux de la precedente multipliez chacun par x, il s'ensuit qu'en supposant que la derniere corde *BR* devienne nulle ou zero (ce qui arrive lorsque l'arc *AR* devient
FIG. CCLXXVI. la demie circonference,) & faisant ce qu'on vient de prescrire, on aura une égalité dont l'inconnuë z exprimera la seconde corde *BE* qui termine l'arc *AE* qui est contenu autant de fois dans la circonference entiere, que l'arc *AD* qui en est la moitié, l'est dans la demie circonference.

Il faut remarquer 1°. Que les égalités qu'on trouve de cette maniere sont les plus simples qu'il est possible, lorsque le nombre des côtés du poligone est un nombre premier: mais que lorsqu'il est composé de deux ou de plusieurs nombres premiers, il faudra diviser d'abord la circonference entiere en autant de parties égales que le plus grand de ces nombres a d'unités, & ensuite une de ces parties en autant de parties égales que l'un des nombres restans a d'unités, & continuer jusqu'à ce que tous les nombres premiers qui composent le nombre donné des côtés du poligone soient épuisés. 2°. Qu'entre

les

les cordes qui partent du point B, & qui sont renfermées dans la demie circonference AEB; les impaires à commencer par la plus grande BE sont les racines vraies, & les paires les fausses des égalités qu'on trouve par cette methode : ainsi les cordes BE, BI, sont les deux racines vraies de l'égalité $z^3 - zz - 2z + 1 = 0$, & la corde BG en est la fausse. 3°. Qu'entre les racines de ces sortes d'égalités, la plus petite est la corde d'un arc qui est la moitié de celui qu'on cherche : c'est-à-dire dans cet exemple, que la plus petite racine BI de l'égalité $z^3 - zz - 2z + 1 = 0$, est la corde d'un arc BI qui est la quatorziéme partie de la circonference.

REMARQUE.

458. Il est visible dans cette derniere Table, que tous les termes du premier & du second rang perpendiculaire ont chacun pour coëficient l'unité ; que ceux du troisiéme & du quatriéme rang ont pour coëficiens les nombres naturels 1, 2, 3, 4 &c, qui se forment par l'addition continuelle des unités ; que ceux du cinquiéme & du sixiéme rang ont pour coëficiens les nombres triangulaires 1, 3, 6, 10 &c qui se forment par l'addition continuelle des nombres naturels ; que ceux du septiéme & du huitiéme rang ont pour coëficiens les nombres piramidaux 1, 4, 10 &c, qui se forment par l'addition continuelle des triangulaires ; & ainsi à l'infini de deux en deux des nombres d'un ordre superieur qui se forment par l'addition continuelle de ceux du dernier ordre.

LEMME I.

459. *S'il y a sur un demi cercle* AEB *deux arcs égaux* AD, EF, *dont l'un* AD *ait son commencement en l'une des extremités* A *du diametre* AB, *& l'autre* EF *soit pris par tout où l'on voudra ; & qu'on tire les cordes* BD, BE, BF, *&* AD, AE, AF : *je dis*, 1°. *Que* $AB \times BF = BD \times BE - AD \times AE$. 2°. *Que* $AB \times AF = BD \times AE + AD \times BE$. Fig. CCLXXVII.

Car les trois triangles rectangles ADG (le point G est ici le point d'interfection des cordes BD, AF) AEB, BFG sont semblables entr'eux ; puisque l'angle AGD ou BGF a-

yant pour mesure la moitié des deux arcs BF, AD, est égal à l'angle BAE qui a aussi pour mesure la moitié des deux arcs BF, FE, ou AD. Si donc l'on nomme le diametre AB; 1; les cordes BD, x; AD, y; BE, v; AE, z, on aura 1°. $BE\ (v) . EA\ (z) :: AD\ (y)\ DG = \frac{yz}{v}$, & partant BG ou $BD - DG = x - \frac{yz}{v}$. 2°. $AB\ (1) . BE\ (v) :: BG\ (x - \frac{yz}{v})\ BF = vx - yz$ c'est à dire (puisque $AB = 1$) que $AB \times BF = BD \times BE - AD \times AE$. Ce qu'il falloit démontrer en premier lieu.

Maintenant $BE\ (v)\ BA\ (1) :: AD\ (y) . AG = \frac{y}{v}$ Et $AB\ (1)\ AE\ (z) :: BG\ (x - \frac{yz}{v}) . GF = xz - \frac{zzy}{v}$ & partant $AG + GF$ ou $AF = xz - \frac{zzy}{v} + \frac{y}{v} = xz + vy$, puisqu'à cause du triangle rectangle AEB on trouve $1 - zz = vv$; c'est-à dire que AF ou $AB \times AF = BD \times AE + AD \times BE$. Et c'est ce qui restoit à démontrer.

LEMME II.

460. *SOIT formée une Table, dont le premier rang parallele étant composé de deux parties* x *&* y*, tous les autres le soient aussi selon cette regle; la premiere partie de tel rang parallele qu'on voudra, vaut la premiere partie du rang parallele qui le precede immédiatement, multipliée par* x*, moins la seconde partie du même rang multipliée par* y*: & la seconde partie vaut la même premiere partie multipliée par* y*, plus la même seconde multipliée par* x*. Soit de plus un arc de cercle quelconque* AR *moindre que la demie circonference divisé en autant de parties égales qu'on voudra, aux* FIG. CCLXXIX. *points* D, E, F, G, &c. *Je dis que si le diametre* AB $= 1$, *& les deux premieres cordes* BD $= x$, AD $= y$; *toutes les autres cordes* BE, BF, BG &c, *seront exprimées par les premieres parties du deuxiéme, troisiéme, quatriéme, &c. rang parallele, & les autres cordes correspondantes* AE, AF, AG, &c, *par les secondes parties des mêmes rangs. Ainsi* BG *étant la quatriéme corde, vaut la premiere partie* $x^4 - 6yyxx + y^4$ *du quatriéme rang parallele, & sa correspondante* AG *vaut la seconde partie* $4yx^3 - 4y^3x$ *du même rang.*

1er	x	y
2e	$xx - yy$	$2yx$
3e	$x^3 - 3yyx$	$3yxx - y^3$
4e	$x^4 - 6yyxx + y^4$	$4yx^3 - 4y^3x$
5e	$x^5 - 10yyx^3 + 5y^4x$	$5yx^4 - 10y^3xx + y^5$
6e	$x^6 - 15yyx^4 + 15y^4xx - y^6$	$6yx^5 - 20y^3x^3 + 6y^5x$
7e	$x^7 - 21yyx^5 + 35y^4x^3 - 7y^6x$	$7yx^6 - 35y^3x^4 + 21y^5xx - y^7$

Car il eſt clair ſelon le Lemme precedent que le produit d'une corde quelconque *AF* par la premiere corde *BD* (x), moins le produit de la corde correſpondante *AF*, par l'autre premiere corde *AD* (y) exprime la valeur de la corde *BG* qui ſuit immédiatement *BF*; & auſſi que la corde *AG* vaut *BF* × *AD* (y) + *AF* × *BD* (x). Donc &c.

COROLLAIRE.

461. Si l'on ajoûte enſemble les deux parties de chaque rang parallele de la Table precedente, en mettant par ordre tous les termes qui les compoſent ſelon les differens degrez des puiſſances de x; on formera cette nouvelle Table qui contiendra par ordre les termes de toutes les puiſſances du binome $x + y$: en obſervant que le premier & le ſecond terme doivent être pris affirmativement, le troiſiéme & le quatriéme negativement, & ainſi alternativement de deux en deux juſqu'au dernier. Ainſi le troiſiéme rang parallele contiendra $x^3 + 3yxx - 3yyx - y^3$; c'eſt-à-dire le cube du binome $x + y$, dont on prend les deux premiers termes affirmativement, & les deux derniers negativement: de même le cinquiéme rang parallele contiendra $x^5 + 5yx^4 - 10yyx^3 - 10y^3xx + 5y^4x + y^5$, qui eſt la cinquiéme puiſſance du binome $x + y$, dont le premier & le ſecond terme ſont pris affirmativement, le troiſiéme & le quatriéme négativement, le cinquieme & le ſixiéme affirmativement; & il en eſt ainſi de tous les autres rangs à l'infini.

1er	$x + y$
2e	$xx + 2yx - yy$
3e	$x^3 + 3yxx - 3yyx - y^3$
4e	$x^4 + 4yx^3 - 6yyxx - 4y^3 x + y^4$
5e	$x^5 + 5yx^4 - 10yyx^3 - 10y^3 xx + 5y^4 x + y^5$
6e	$x^6 + 6yx^5 - 15yyx^4 - 20y^3 x^3 + 15y^4 xx + 6y^5 x - y^6$
7e	$x^7 + 7yx^6 - 21yyx^5 - 35y^3 x^4 + 35y^4 x^3 + 21y^5 xx - 7y^6 x - y^7$

Car ſi l'on fait attention à la maniere dont la Table precedente eſt formée, on verra que tous les termes de chacun de ſes rangs paralleles ſont formés par ceux du rang parallele qui le precede, multipliés par x & par y, & joints par des ſignes + & —, en telle ſorte que les termes des deux parties qui compoſent chaque rang, étant mis par ordre, ſelon les differens degré de l'inconnuë x, il y a de ſuite deux ſignes +, & après deux ſignes —; & ainſi alternativement juſqu'au dernier.

REMARQUE.

462. Il eſt viſible dans cette derniere Table, que tous les termes du premier rang perpendiculaire, ont chacun pour coëficient l'unité, que ceux du ſecond rang ont pour coëficiens les nombres naturels 1, 2, 3, 4, &c, qui ſe forment par l'addition continuelle des unités; que ceux du troiſiéme rang ont pour coëficiens les nombres triangulaires 1, 3. 6, 10, &c, qui ſe forment par l'addition continuelle des nombres naturels; que ceux du quatriéme rang ont pout coëficiens les nombres piramidaux 1, 4, 10, 20, &c, qui ſe forment par l'addition continuelle des triangulaires; & ainſi à l'infini de rang en rang en avançant vers la droite, les nombres d'un ordre ſuperieur, ſe forment par l'addition continuelle de ceux de l'ordre immédiatement precedent.

EXEMPLE XIII.

463. Un arc de cercle AR étant donné, le diviſer en autant de
Fig. CCLXXVIII. parties égales qu'on voudra, aux points D, E, F, G &c; par une methode differente de celle de l'Exemple dixiéme.

Ayant nommé le diametre AB, 1; les cordes données BR, a; AR, b; qui terminent l'arc donné AR; & les cordes in-

connuës BD, x; AD, y; qui terminent l'arc cherché AD; on élevera le binome $x + y$ à une puissance dont l'exposant soit égal au nombre des divisions. On formera deux égalités, dont la premiere aura pour l'un de ses membres sa donnée a, & pour l'autre tous les termes impairs de la puissance de $x + y$, joints par des signes + & — alternatifs; & la seconde aura pour l'un de ses membres la donnée b, & pour l'autre tous les autres termes de la même puissance du binome $x + y$, joints encore ensemble par des signes alternatifs + & —. On fera évanoüir l'une ou l'autre des inconnuës x ou y, par le moyen de l'égalité $xx = 1 - yy$ ou $yy = 1 - xx$, qui se tire du triangle ADB rectangle en D: ce qui donnera enfin une derniere égalité où il n'y aura qu'une seule inconnuë x ou y, dont la resolution fournira la valeur de cette inconnue BD ou AD qui termine l'arc cherché AD.

Qu'il faille, par exemple, diviser l'arc cherché AR en sept parties égales aux points D, E, F, G, H, I. Je prends la septiéme puissance $x^7 + 7yx^6 + 21yyx^5 + 35y^3x^4 + 35y^4x^3 + 21y^5xx + 7y^6x + y^7$ du binome $x + y$, de laquelle je forme les deux égalités $a = x^7 - 21yyx^5 + 35y^4x^3 - 7y^6x$, & $b = 7yx^6 - 35y^3x^4 + 21y^5xx - y^7$. Et faisant évanoüir dans la premiere de ces deux égalités l'inconnuë y, ou dans la seconde l'inconnuë x, par le moyen de l'egalité $yy = 1 - xx$ ou $xx = 1 - yy$, je forme l'une de ces deux nouvelles égalités $a = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x$ ou $b = 7y - 56y^3 + 112y^5 - 64y^7$, qui ne renferme plus qu'une seule inconnuë, & dont la resolution qui se fera selon les regles du Livre precedent fournira pour l'une de ses racines x ou y, une valeur BD ou AD qui servira à déterminer la premiere des parties égales demandées. Tout cela est une suite des deux articles precedens.

Il est à remarquer que si l'arc AR étoit plus grand que la demie circonference, celle des deux égalités precedentes qui a pour l'un de ses membres $+ b$ sert également sans y rien changer, mais dans l'autre il faut changer le membre $+ a$ en $- a$; dont la raison est que la corde BR (a) passant de l'autre côté du point B devient negative de positive qu'elle étoit, au lieu que la corde AR ne re-

paſſant point de l'autre côté du point *A* demeure toûjours poſitive.

LEMME I.

464. *QUE dans un quarré quelconque de cellules on rempliſſe de la lettre* a, *toutes les cellules du premier rang parallele; de la lettre* b, *toutes les cellules du premier rang perpendiculaire, excepté la premiere; & enſuite toutes les autres cellules par le moyen de cette regle; c'eſt à ſçavoir qu'une cellule doit toujours être égale à celle qui eſt au deſſus plus à celle qui eſt à gauche: de cette ſorte on aura le quarré de cellules qu'on voit ici. Or cela poſé;*

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
1.	a	a	a	a	a	a	a
2.	b	$a + b$	$2a + b$	$3a + b$	$4a + b$	$5a + b$	$6a + b$
3.	b	$a + 2b$	$3a + 3b$	$6a + 4b$	$10a + 5b$	$15a + 6b$	$21a + 7b$
4.	b	$a + 3b$	$4a + 6b$	$10a + 10b$	$20a + 15b$	$35a + 21b$	$56a + 28b$
5.	b	$a + 4b$	$5a + 10b$	$15a + 20b$	$35a + 35b$	$70a + 56b$	$126a + 84b$
6.	b	$a + 5b$	$6a + 15b$	$21a + 35b$	[illegible] $+ 70b$	1[illegible]$a + 126b$	$252a + 210b$
7.	b	$a + 6b$	$7a + 21b$	$28a + 56b$	$84a + 126b$	$210a + 252b$	$462a + 462b$

Je dis qu'une cellule quelconque eſt égale à la cellule qui eſt à gauche plus à toutes celles qui ſont au deſſus: c'eſt à dire par exemple, que la quatriéme cellule 4a + 6b *du troiſiéme rang perpendiculaire, eſt égale à la cellule* a + 3b *qui eſt à gauche, & qui par conſequent eſt la quatriéme du ſecond rang perpendiculaire, plus à toutes les autres* a + 2b, a + b, a, *qui ſont au deſſus d'elle dans ce ſecond rang.*

Car ſuppoſant que *a*, *c*, *d*, *e*, expriment les quatre premieres cellules du ſecond rang perpendiculaire, & *a*, *f*, *g*, *b*, les quatre premiers du troiſieme rang, on aura par la formation du quarré de cellules $b = e + g$, $g = d + f$, $f = c + a$, & partant $b = e + d + c + a$; ce qu'il falloit prouver. Or il eſt viſible que cette demonſtration ſe peut appliquer à tel nombre de cellules qu'on voudra de deux rangs perpendiculaires voiſins. Donc &c.

COROLLAIRE

465. PUISQUE toutes les cellules excepté celles du premier rang parallele & celle du premier rang perpendiculaire, ſont compoſées de deux termes dans le premier deſquels ſe trouve la lettre *a*, & dans le ſecond la lettre *b*; il s'enſuit 1°. Que le terme où ſe trouve la lettre *a*, eſt égal au terme où ſe trouve la même lettre *a* dans la cellule gauche, plus à tous les termes où elle ſe rencontre dans les cellules qui ſont au deſſus de celle ci. 2°. Que le terme où ſe trouve la lettre *b*, eſt égal au terme où ſe trouve la même lettre *b* dans la cellule à gauche, plus à tous ceux où elle ſe trouve dans les cellules qui ſont au deſſus. Ainſi le terme 15*a* de la cinquiémê cellule du quatriéme rang perpendiculaire, eſt égal au terme 5*a* de la cellule à gauche, plus aux termes 4*a*, 3*a*, 2*a*, 1*a*, qui ſe trouvent dans les cellules qui ſont au deſſus de celle-ci; & de même 20 *b* eſt égal au terme 10 *b* de la cellule à gauche, plus aux termes 6*b*, 3*b*, 1*b*, de toutes les cellules qui ſont au deſſus.

LEMME II.

466. *SI l'on multiplie le terme où ſe trouve la lettre* a *dans une cellule quelconque, par la ſomme des expoſans de ſon rang parallele & de ſon rang perpendiculaire moins* 2, *& qu'on diviſe le produit par l'expoſant de ſon rang perpendiculaire moins* 1; *je dis que le quotient ſera égal à ce terme plus à tous ceux qui ſont au deſſus de lui: c'eſt à dire, par exemple, que ſi l'on multiplie le terme* 15a *de la cinquiéme cellule du quatriéme rang perpendiculaire par* $5 + 4 - 2 = 7$, *& qu'on diviſe le produit par* $4 - 1 = 3$; *le quotient* 35a *ſera égal au terme* 15a *plus à tous les autres* 10a, 6a, 3a, 1a, *qui ſont au deſſus de lui.*

Cela eſt viſible dans toutes les cellules du deuxiéme rang perpendiculaire, puiſqu'elles contiennent toutes le même terme 1*a*. Or je vais démontrer que ſuppoſé que cette proprieté ſe rencontre dans un rang perpendiculaire quelconque, elle ſe trouve neceſſairement dans celui qui eſt à droit; d'où il ſuivra que puiſqu'elle ſe trouve dans le deuxiéme rang

perpendiculaire, elle sera aussi dans le troisiéme, que puisqu'elle se rencontre dans le troisiéme, elle sera aussi dans le quatriéme, & ainsi de suite à l'infini. Pour le prouver.

Soient a, c, d, e, f &c, autant de termes qu'on voudra de ceux où se trouve la lettre a, dans un rang perpendiculaire quelconque à commencer par le premier; a, g, b, k, l, &c un pareil nombre de termes du rang qui est à droit à commencer aussi par le premier. Soit de plus m égale à la somme des exposans moins 2 des rangs perpendiculaire & parallele de la cellule où se trouve le terme f; & r égale à l'exposant moins 1 du rang perpendiculaire de cette cellule. Par la supposition $\frac{m}{r}f = f + e + d + c + a =$ * l, $\frac{m-1}{r}e = e + d + c + a = k$, $\frac{m-2}{r}d = d + c + a = b$, $\frac{m-3}{r}c = c + a = g$, $\frac{m-4}{r}a = a$. Donc $l + k + b + g + a = \frac{m}{r}f + \frac{m-1}{r}e + \frac{m-2}{r}d + \frac{m-3}{r}c + \frac{m-4}{r}a = \frac{m}{r} \times \overline{f + e + d + c + a}, - \frac{1}{r} \times \overline{1e + 2d + 3c + 4a} = \frac{m}{r}l, - \frac{1}{r} \times \overline{k + b + g + a}$ en mettant pour $f + e + d + c + a$ sa valeur l, & pour $1e + 2d + 3c + 4a$ sa valeur $k + b + g + a$: transposant d'une part l & de l'autre $- \frac{1}{r} \times \overline{k + b + g + a}$, on aura $\frac{r+1}{r} \times \overline{k + b + g + a} = \frac{m-r}{r}l$: multipliant de part & d'autre par r, divisant par $r + 1$; & ajoutant de part & d'autre l, il vient enfin $\frac{m+1}{r+1}l = l + k + b + g + a$. Mais comme le rang perpendiculaire de la cellule où se trouve l, surpasse d'une unité celui de la cellule où se trouve f, & que leur rang parallele demeure le même; il est évident que la proprieté marquée pour chaque terme où se trouve la lettre a dans un rang perpendiculaire quelconque, convient aussi au terme l du rang perpendiculaire qui est à droit. De plus puisque cette démonstration subsiste également tel que puisse être le nombre de termes des deux rangs perpendiculaires voisins, il s'ensuit que ce que l'on vient de montrer par rapport au terme l, sera vrai aussi à l'égard de tout autre de son rang perpendiculaire.

* Art. 464.

Si l'on suppose à present que n exprime en general l'exposant d'un rang parallele quelconque autre que le premier, on verra que la premiere cellule de ce rang ne renferme aucun terme où la lettre a se rencontre; que la seconde renferme toujours $1a$; que si l'on multiplie $1a$ par $\frac{n+2-2}{2-1} = \frac{n}{1}$, on aura $\frac{n}{1}a$ pour le terme où se trouve la lettre a dans

dans la troisiéme cellule; & de même que si l'on multiplie $\frac{n}{1}a$ par $\frac{n+3-2}{3-1} = \frac{n+1}{2}$, on aura $\frac{n}{1}a \times \frac{n+1}{2}$ pour le terme où se trouve a dans la quatriéme cellule : de sorte que cette suite 0, $1a$, $\frac{n}{1}a$, $\frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2}a$, $\frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+m}{3}a$, $\frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3} \times \frac{n+3}{4}a$ &c., exprimera par ordre tous les termes où se trouve la lettre a, dans les cellules du rang parallele dont n est l'exposant. Ainsi si $n = 5$, la suite 0, $1a$, $5a$, $15a$, $35a$ &c, exprimera par ordre tous les termes où se trouve la lettre a dans les cellules du cinquiéme rang parallele.

LEMME III.

467. *Si l'on multiplie le terme où se trouve la lettre* b *dans une cellule quelconque, par la somme des exposans de son rang parallele & de son rang perpendiculaire moins* 2, *& qu'on divise le produit par l'exposant de son rang perpendiculaire; je dis que le quotient sera égal à ce terme plus à tous ceux qui sont au dessus de lui : c'est à dire, par exemple, que si l'on multiplie le terme* 10b *de la cinquiéme cellule du troisiéme rang perpendiculaire par* $5 + 3 - 2 = 6$, *& qu'on divise le produit par* 3, *on aura* 20b *pour la somme du terme* 10b, *& de tous les autres* 6b, 3b, 1b, *qui sont au dessus de lui :*

Il est visible que cette proprieté se rencontre dans le premier rang perpendiculaire où toutes les cellules renferment la même valeur $1b$, excepté la premiere dans laquelle la lettre b ne se rencontre point. Or de cela seul l'on prouvera comme l'on vient de faire dans le Lemme precedent à l'égard des termes qui sont multiples de, a, qu'elle se doit rencontrer dans le second rang perpendiculaire, dans le troisiéme, dans le quatriéme, & ainsi dans tous les autres à l'infini. D'où l'on conclura que si n designe l'exposant d'un rang parallele quelconque autre que le premier; la suite $1b$, $\frac{n-1}{1}b$, $\frac{n-1}{1} \times \frac{n}{2}b$, $\frac{n-1}{1} \times \frac{n}{2} \times \frac{n+1}{3}b$, $\frac{n-1}{1} \times \frac{n}{2} \times \frac{n+1}{3} \times \frac{n+2}{4}b$ &c, exprimera par ordre tous les termes où se trouve la lettre b dans les cellules du rang parallele dont n est l'exposant. Ainsi si $n = 5$, la suite $1b$, $4b$, $10b$, $20b$, $35b$, &c, exprimera par ordre tous les termes où se trouve b dans le cinquiéme rang parallele.

COROLLAIRE.

468. Il ſuit de ces deux derniers Lemmes, que ſi l'on ajoute par ordre tous les termes de cette ſuite à ceux de la precedente, on en formera une, $1b$, $1a$, $+ \frac{n-1}{1} b$, $\frac{n}{1} a + \frac{n-1}{1} \times \frac{n}{2} b$, $\frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} a + \frac{n-1}{1} \times \frac{n}{2} \times \frac{n+1}{3} b$, $\frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3} a \times \frac{n-1}{1} \times \frac{n}{2} \times \frac{n+1}{3} \times \frac{n+2}{4} b$, *&c*; ou en abregeant l'expreſſion, b, $a + \frac{n-1}{1} b$, $a + \frac{n-1}{2} b \times \frac{n}{1}$, $a + \frac{n-1}{3} b \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2}$, $a + \frac{n-1}{4} b \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3}$ *&c.* qui exprimera par ordre toutes les cellules du rang parallele de la Table dont n eſt l'expoſant.

D'où l'on voit que par le moyen de cette ſuite, on peut trouver tout d'un coup telle cellule qu'on voudra, les expoſans de ſon rang parallele & perpendiculaire étant donnés; puiſque prenant dans la ſuite generale le terme qui répond à l'expoſant du rang perpendiculaire, c'eſt à dire, le quatriéme terme, ſi le rang perpendiculaire eſt le quatriéme, le cinquiéme, s'il eſt le cinquiéme &c, & mettant dans ce terme à la place de n l'expoſant du rang parallele, on aura la cellule que l'on cherche. Que l'on demande, par exemple, la cinquiéme cellule du quatriéme rang perpendiculaire; ayant mis dans le quatriéme terme $a + \frac{n-1}{3} b \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2}$, à la place de n l'expoſant 5 du rang parallele de la cellule on trouvera $a + \frac{4}{3} b \times 15$, c'eſt-à-dire, $15a + 20b$ pour cette cellule; & il en eſt ainſi de toutes les autres.

LEMME IV.

469. *Si l'on fait* a = 2 *&* b = 1 *dans le quarré de cellules de l'article* 464, *on le changera en celui ci; duquel je dis que le premier rang parallele contient de ſuite le premier terme de tous les rangs perpendiculaires de la Table de l'article* 443; *le ſecond rang parallele, les ſeconds termes; le troiſiéme rang, les troiſiémes termes; & ainſi de ſuite à l'infini.*

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
1.	2	2	2	2	2	2	2
2.	1	3	5	7	9	11	13
3.	1	4	9	16	25	36	49
4.	1	5	14	30	55	91	140
5.	1	6	20	50	105	196	336
6.	1	7	27	77	182	378	714
7.	1	8	35	112	294	672	1386

Cela eſt une ſuite naturelle de l'article 445, & de la formation du quarré de cellules de l'article 464, expliquée dans ce même article & dans le ſuivant 465.

COROLLAIRE.

470. SI l'on fait $b = 1$ & $a = 2$ dans la ſuite generale de l'article 468. b, $a + \frac{n-1}{1} b$, $a + \frac{n-1}{2} b \times \frac{n}{1}$, $a + \frac{n-1}{3} b \times \frac{n}{2} \times \frac{n+1}{2}$, $a + \frac{n-1}{4} b \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3}$ &c; on la changera en cette autre 1, $\frac{n+1}{1}$, $\frac{n+3}{2} \times \frac{n}{1}$, $\frac{n+5}{3} \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2}$, $\frac{n+7}{4} \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3}$ &c, par le moyen de laquelle on trouvera tout d'un coup le coëficient de tel terme qu'on voudra de la Table de l'article 443, ſon rang perpendiculaire & le quantiéme qu'il y occupe étant donnés. Voici la regle.

On prendra dans cette ſuite le terme qui répond au rang perpendiculaire donné, c'eſt-à-dire le troiſiéme, ſi c'eſt le troiſiéme rang, le quatriéme, ſi c'eſt le quatriéme &c; & ayant mis dans ce terme à la place de n le nombre qui expoſe le quantiéme du terme dans ſon rang perpendiculaire, c'eſt-à-dire 4 s'il eſt le quatriéme, 5, s'il eſt le cinquiéme &c, on aura le coëficient qu'on cherche. Si l'on demande, par exemple, le coëficient du quatriéme terme $14x^3$ du troiſiéme rang perpendiculaire; on mettra dans le troiſiéme terme $\frac{n+3}{2} \times \frac{n}{1}$ à la place de n le nombre 4, & l'on aura 14 pour le coëficient cherché.

Car l'expoſant du rang perpendiculaire du coëficient pris dans la Table de l'article 443, eſt le même que l'expoſant du rang perpendiculaire du quarré de cellules de l'article precedent; & le quantiéme que ce coëficient occupe dans ſon rang

perpendiculaire, eſt l'expoſant du rang parallele du quarré de cellules. D'où l'on voit que cette regle n'eſt qu'une application de celle de l'article 468, à ce cas particulier ou $a=2$ & $b=1$.

LEMME V.

471. *Si l'on met* 1 *à la place de* b *dans le quarré de cellules de l'article* 464 ; *on le changera en celui-ci, dont je dis que les rangs perpendiculaires contiennent par ordre tous les nombres qu'on appelle* Figurés : *ſçavoir le premier rang les nombres du premier ordre qui ſont les unités, le ſecond rang les nombres naturels ou du ſecond ordre qui ſe forment par l'addition continuelle des unités, le troiſiéme rang les nombres triangulaires ou du troiſiéme ordre qui ſe forment par l'addition continuelle des naturels, le quatriéme les nombres piramidaux ou du quatriéme ordre qui ſe forment par l'addition continuelle des triangulaires, & ainſi à l'infini.*

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
1.	1	1	1	1	1	1	1
2.	1	2	3	4	5	6	7
3.	1	3	6	10	15	21	28
4.	1	4	10	20	35	56	84
5.	1	5	15	35	70	126	210
6.	1	6	21	56	126	252	462
7.	1	7	28	84	210	462	924

Car ſelon le même article 464, chaque cellule eſt égale à celle qui eſt à gauche, plus à toutes les autres qui ſont au deſſus.

M. Paſchal a fait un Traité qui a pour titre Triangle Arithmetique, dans lequel il conſidere les proprietés de ces nombres, & fait voir qu'ils ſont d'un trés-grand uſage dans pluſieurs queſtions d'Arithmetique.

COROLLAIRE.

Si l'on fait $a = 1$ & $b = 1$ dans la ſuite generale de l'article 468. b, $a + \frac{n-1}{1} b$, $a + \frac{n-1}{2} b \times \frac{n}{1}$, $a + \frac{n-1}{3} b \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2}$, $a + \frac{n-1}{4} b \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3}$ &c ; on changera en cette autre 1, n, $\frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2}$, $\frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3}$, $\frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3} \times \frac{n+3}{4}$ &c, qui ſervira à trouver tout d'un coup tel nombre figuré qu'on voudra, ſon ordre étant donné avec le quantiéme qu'il y occupe. Voici comment.

On prendra dans cette derniere ſuite le terme qui répond à l'ordre donné, c'eſt-à-dire, le troiſiéme, ſi c'eſt le troiſiéme ordre, le quatriéme, ſi c'eſt le quatriéme ordre &c; & ayant mis à la place de n le nombre qui expoſe le quantiéme du nombre figure, c'eſt-à-dire 4, s'il doit être le quatriéme, 5, s'il doit être le cinquiéme &c, on aura ce nombre. Qu'il faille, par exemple, trouver le cinquiéme nombre du quatriéme ordre; je mets dans le quatriéme terme $\frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3}$ de la ſuite à la place de n le nombre 5, & j'ai 35 pour le nombre cherché.

Ceci n'eſt autre choſe que l'application de la regle de l'article 468. à ce cas particulier.

PROBLESME I.

473. *Soit propoſé de trouver une ſuite generale, qui exprime par ordre tous les termes d'un rang parallele quelconque de la Table de la diviſion des arcs de l'article* 443.

Comme le troiſiéme terme d'un rang perpendiculaire quelconque de cette Table, répond toujours au premier du rang qui eſt à droit; il s'enſuit que ſi $m + 1$ exprime en general l'expoſant du rang parallele, il faudra trouver dans le premier rang perpendiculaire, le coëficient du terme dont le quantiéme eſt $m + 1$; dans le deuxiéme, le coëficient du terme dont le quantiéme eſt $m + 1 - 2$ ou $m - 1$; dans le troiſiéme, le coëficient du terme dont le quantiéme eſt $m - 1 - 2$ ou $m - 3$, & ainſi de ſuite en diminuant toujours de 2 le quantiéme du terme, à meſure que le rang perpendiculaire avance vers la droite. Il faudra donc ſelon la regle de l'article 470. mettre dans le ſecond terme $\frac{n+1}{1}$ à la place de n le nombre $m - 1$; dans le troiſiéme terme $\frac{n+1}{2} \times \frac{n}{1}$ à la place de n le

nombre $m - 3$, dans le quatriéme terme $\frac{n+5}{3} \times \frac{n+1}{2}$ à la place de n le nombre $m - 5$; dans le cinquiéme $\frac{n+7}{4} \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3}$ à la place de n le nombre $m - 7$; &c : ce qui donnera pour la ſuite des coëficiens 1, m, $\frac{m}{2} \times \frac{m-3}{1}$, $\frac{m}{3} \times \frac{m-5}{1} \times \frac{m-4}{2}$, $\frac{m}{4} \times \frac{m-7}{1} \times \frac{m-6}{2} \times \frac{m-5}{3}$, &c. Or comme les ſignes des termes d'un rang parallele quelconque de la Table ſont toujours alternatifs ; & que le premier terme eſt toujours l'inconnuë x élevée à une puiſſance dont l'expoſant eſt moindre d'une unité que celui du rang parallele ; & que tous les autres termes renferment des puiſſances de x dont les expoſans diminuent continuellement de 2, en obſervant que $x^0 = 1$: il s'enſuit qu'on aura $x^m - mx^{m-2} + \frac{m}{2} \times \frac{m-3}{1} x^{m-4} - \frac{m}{3} \times \frac{m-5}{1} \times \frac{m-4}{2} x^{m-6} + \frac{m}{4} \times \frac{m-7}{1} \times \frac{m-6}{2} \times \frac{m-5}{3} x^{m-8}$ &c, pour l'expreſſion generale du rang parallele de la Table, dont l'expoſant eſt $m + 1$. Ce qui étoit propoſé.

Lorſqu'on a les premiers termes de ces ſortes ſuites, il eſt facile d'obſerver la loy qui y regne par tout, & qui ſert à les continuer autant que l'on veut. Si l'on ſuppoſe, par exemple, dans celle-ci, que r exprime le quantiéme du terme dont on veut avoir le coëficient ; il ſera exprimé par la fraction generale $\frac{m \times m-r \times m-r-1 \times m-r-2 \ \&c.}{r-1 \times r-2 \times r-3 \times r-4 \ \&c.}$, en obſervant que le numerateur & le dénominateur doivent avoir chacun autant de termes, que le nombre $r - 1$ contient d'unités. Ainſi ſi $r = 5$, on aura pour le coëficient du cinquiéme terme, la fraction $\frac{m \times m-5 \times m-6 \times m-7}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$: ſi $r = 4$, on aura $\frac{m \times m-4 \times m-5}{3 \times 2 \times 1}$.

Il faut remarquer que le nombre des termes de cette ſuite eſt toujours déterminé, de ſorte qu'il eſt égal à la plus grande moitié de l'expoſant du rang parallele qu'elle exprime, lorſque cet expoſant eſt impair, & à ſa moitié au juſte lorſqu'il eſt pair. Ainſi elle n'a que trois termes, lorſqu'elle exprime le cinquiéme ou le ſixiéme rang parallele, elle n'en a que quatre, lorſqu'elle exprime le ſeptiéme ou le huitiéme rang parallele, &c.

PROBLESME II.

474. *SOIT propoſé de trouver une ſuite generale qui exprime par ordre tous les termes de tel rang parallele qu'on voudra, de la Table de l'inſcription des poligones reguliers de l'article 457.*

Comme le second terme de chaque rang perpendiculaire répond au premier de celui qui est à droit, il s'ensuit * que si ** Art. 458.*
$m + 1$ est l'exposant d'un rang parallele quelconque de cette Table, les coëficiens des quatre premiers termes de ce rang seront 1, 1, $m - 1$, $m - 2$; le coëficient du cinquiéme terme sera le nombre triangulaire dont le quantiéme est $m - 3$, ** Art. 472.*
c'est à dire * $\frac{m-3}{1} \times \frac{m-2}{2}$; celui du sixiéme rang sera le nombre triangulaire dont le quantiéme est $m - 4$, c'est à dire $\frac{m-4}{1} \times \frac{m-3}{2}$; celui du septiéme terme sera le nombre piramidal dont le quantiéme est $m - 5$, c'est à dire $\frac{m-5}{1} \times \frac{m-4}{2} \times \frac{m-3}{3}$; celui de huitiéme terme sera le nombre piramidal dont le quantiéme est $m - 6$, c'est-à-dire, $\frac{m-6}{1} \times \frac{m-5}{2} \times \frac{m-4}{3}$; celui du neuviéme terme sera le nombre du cinquiéme ordre dont le quantiéme est $m - 7$, c'est-à-dire $\frac{m-7}{1} \times \frac{m-6}{2} \times \frac{m-5}{3} \times \frac{m-4}{4}$; & ainsi à l'infini. Si donc l'on joint à ces coëficiens les puissances de z qu'ils affectent, en faisant preceder le second & le troisiéme terme du signe $-$, le quatriéme & le cinquiéme du signe $+$, le sixiéme & le septiéme du signe $-$, & ainsi alternativement de deux en deux; on aura cette suite generale $z^m - z^{m-1} - \overline{m-1}\, z^{m-2} + \overline{m-2}\, z^{m-3} + \frac{m-3}{1} \times \frac{m-2}{2} z^{m-4} - \frac{m-4}{1} \times \frac{m-3}{2} z^{m-5} - \frac{m-5}{1} \times \frac{m-4}{2} \times \frac{m-3}{3} z^{m-6} + \frac{m-6}{1} \times \frac{m-5}{2} \times \frac{m-4}{3} z^{m-7} + \frac{m-7}{1} \times \frac{m-6}{2} \times \frac{m-5}{3} \times \frac{m-4}{4} z^{m-8}$. &c, qui exprime par ordre tous les termes du rang parallele de la Table de l'article 457 dont l'exposant est $m + 1$: où l'on doit observer de ne prendre qu'autant de termes que le nombre $m + 1$ contient d'unités.

PROBLESME III.

475. *TROUVER une suite generale, qui exprime par ordre, les coëficiens de tous les termes, de tel rang parallele qu'on voudra, de la Table de l'article* 460; *ou (ce qui est la même chose) d'une puissance quelconque du binome* $x + y$.

Soit en general m l'exposant d'un rang parallele quelconque de cette Table, il est clair que les coëficiens des deux premiers termes de ce rang seront toujours * 1, m; comme ** Art. 462.*
le second terme de chaque rang perpendiculaire à commencer par le second, répond au premier terme du rang qui est à droit, il s'ensuit que le coëficient du troisiéme terme du

* *Art.* 462. rang parallele sera * le nombre triangulaire dont le quantiéme est $m - 1$, c'est-à-dire * $\frac{m-1}{1} \times \frac{m}{2}$; que celui du quatriéme terme sera le nombre piramidal dont le quantiéme est $m - 2$, c'est-à-dire $\frac{m-2}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m}{3}$; que celui du cinquiéme terme sera le nombre du cinquiéme ordre dont le quantiéme est $m - 3$, c'est-à-dire $\frac{m-3}{1} \times \frac{m-2}{2} \times \frac{m-1}{3} \times \frac{m}{4}$; & ainsi à l'infini. On aura donc pour la suite generale qu'on demande $1, m, \frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2}, \frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3}, \frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \frac{m-3}{4}$ &c.

* *Art.* 472.

COROLLAIRE.

476. De là il suit que $\overline{x \mp y}^m = x^m \mp \frac{m}{1} y x^{m-1} + \frac{m \times \overline{m-1}}{1 \times 2} yy x^{m-2} \pm \frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2}}{1 \times 2 \times 3} y^3 x^{m-3} + \frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2} \times \overline{m-3}}{1 \times 2 \times 3 \times 4} y^4 x^{m-4} \mp \frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2} \times \overline{m-3} \times \overline{m-4}}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} y^5 x^{m-5}$ &c.

PROBLESME IV.

477. *TROUVER une équation generale qui serve à diviser un arc de cercle donné* AR, *en autant de parties égales qu'on voudra.*

PREMIERE MANIE'RE.

Fig. CCLXXIX. Soit en general m le nombre des parties égales, l'arc AD la premiere de ces parties; soit tiré le diametre AB, & les cordes BD, BR; & soit le rayon CA ou $CB = 1$, la corde

* *Art.* 444. 473. donnée $BR = a$, la corde cherchée $BD = x$. On aura * $\mp a = x^m - m x^{m-2} + \frac{m \times \overline{m-3}}{2 \times 1} x^{m-4} - \frac{m \times \overline{m-4} \times \overline{m-5}}{3 \times 1 \times 2} x^{m-6} + \frac{m \times \overline{m-7} \times \overline{m-6} \times \overline{m-5}}{4 \times 1 \times 2 \times 3} x^{m-8}$ &c, (sçavoir $+ a$ lorsque l'arc donné AR est moindre que la demie circonference, & $- a$ lorsqu'il est plus grand) pour l'équation generale qu'on demande; de laquelle il ne faut prendre qu'autant de termes, que la moitié du nombre m lorsqu'il est pair, ou sa plus grande moitié lorsqu'il est impair contient d'unités; parce que le terme qui suivroit seroit nul ou zero.

Si $m = 5$, il vient $\mp a = x^5 - 5x^3 + 5x$; si $m = 7$, on trouve $\mp a = x^7 - 7z^5 + 14x^3 - 7x$.

SECONDE

SECONDE MANIÉRE.

Soit tiré le diametre AB, & les cordes BR, AR, BD, AD, qui terminent l'arc donné AR, & l'arc cherché AD. Soit m le nombre des parties égales, le diametre $AB = 1$, les cordes données $BR = a$, $AR = b$; & les cordes inconnuës $BD = x$, $AD = y$. On aura * ces deux égalités generales $\mp a = x^m$ * Art. 463.
$- \frac{m \times m-1}{1 \times 2} yy\, x^{m-2} + \frac{m \times m-1 \times m-2 \times m-3}{1 \times 2 \times 3 \times 4} y^4\, x^{m-4}$ &c, 475.
$b = \frac{m}{1} y\, x^{m-1} - \frac{m \times m-1 \times m-2}{1 \times 2 \times 3} y^3\, x^{m-3} + \ldots$
$\frac{m \times m-1 \times m-2 \times m-3 \times m-4}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} y^5\, x^{m-5}$ &c, dans lesquelles mettant à la place de m, le nombre de parties égales dans lesquelles l'arc AR doit être divisé, il en vient deux autres particulieres, dont la resolution fournit la valeur cherchée de la corde BD (x) ou AD (y), après avoir fait évanoüir l'inconnuë y ou x, par le moyen de l'équation $yy = 1 - xx$ ou $xx = 1 - yy$.

Soit par exemple $m = 7$. On aura $\mp a = x^7 - 21yyx^5 + 35y^4x^3 - 7y^6x$, & $b = 7yx^6 - 35y^3x^4 + 21y^5\, xx - y^7$, & l'on achevera le reste comme dans l'article 464.

PROBLESME V.

478. *TROUVER une équation generale, qui serve à inscrire dans un cercle donné, un poligone regulier quelconque* ADEFGHK &c. FIG. CCLXXX.

Soit tiré le diametre AB, & la corde BD qui terminent le premier côté du poligone; soit le rayon donné CA ou $CB = 1$, la corde inconnuë $BD = z$, & en general m la plus petite moitié du nombre des côtés du poligone, que je suppose être impair. On aura * $0 = z^m - z^{m-1} - m - 1\, z^{m-2} +$ * Art. 457. 474.
$m - 2\, z^{m-3} + \frac{m-3}{1} \times \frac{m-2}{2} z^{m-4} - \frac{m-4}{1} \times \frac{m-3}{2} z^{m-5}$
$- \frac{m-5}{1} \times \frac{m-4}{2} \times \frac{m-3}{3} z^{m-6} + \frac{m-6}{1} \times \frac{m-5}{2} \times \frac{m-4}{3} z^{m-7}$
$+ \frac{m-7}{1} \times \frac{m-6}{2} \times \frac{m-5}{3} \times \frac{m-4}{4} z^{m-8}$ &c, pour l'équation generale qu'on demande; de laquelle il ne faut prendre qu'autant de termes que le nombre $m + 1$ contient d'unités, parce que celui qui suivroit seroit nul ou zero.

Soit par exemple 7 le nombre des côtés du poligone à inscri-

re, on aura $m = 3$, & partant $o = z^3 - zz - 2z + 1$, dont la plus grande racine z exprimera la corde BD; qui termine l'arc AD, qui a pour corde le premier côté AD du poligone. De même si le nombre des côtés est 11, on aura $m = 5$; & par consequent l'équation generale devient $o = z^5 - z^4 - 4z^3 + 3zz + 3zz + 3z - 1$, dont la plus grande des racines est $z = BD$.

PROBLESME VI.

479. *DIVISER un angle donné en un nombre quelconque impair de parties egales, par le moyen d'un instrument.*

Fig. CCLXXXI. CCLXXXII. 1°. Soit proposé de diviser l'angle donné ECF en trois parties égales. Il faut avoir un rhombe $ABCD$, dont les quatre côtés soient mobiles autour de ses quatre angles, & duquel les deux côtés AB, AD, soient indéfiniment prolongés vers X & Z; attacher l'angle C du rhombe, dans le sommet C de l'angle donné ECF; marquer sur les côtés CE, CF, les points E, F; en sorte que CE & CF soient égales chacune au côté CB ou CD ou DA ou AB du rhombe. Cela fait, il faut ouvrir ou resserrer les côtés AX, AZ, de l'angle BAD, en sorte qu'ils passent par les points E, F; & l'angle BAD sera la troisiéme partie de l'angle ECF.

Car les triangles ABC, BCE, étant isoscelles, l'angle extêrne CBE, ou son égal CEB, qui vaut les deux internes opposés BAC, BCA, sera double de l'angle BAC; & dans le triangle ECA; l'angle externe ECY; qui vaut l'angle CEA plus l'angle BAC, sera triple de l'angle BAC. On démontrera de même que l'angle FCY est triple de l'angle DAC. D'où il suit que l'angle donné ECF est triple de l'angle BAD. *Ce qu'il falloit &c.*

Fig. CCLXXXIII. CCLXXXIV. 2°. Soit proposé de diviser l'angle donné HGK, en cinq parties égales. On attachera dans l'angle C du rhombe $ABCD$ de l'instrument precedent, un autre rhombe $CEGF$, dont les côtés seront égaux à ceux du premier & mobiles aussi autour de leurs angles. On fichera l'angle G de ce dernier rhombe, dans le sommet G de l'angle donné HGK; & ayant pris sur les côtés de cet angle les parties GH, GK, égales chacune au côté GE de l'un des rhom-

bes, on ouvrira ou fermera l'angle XAZ mobile autour du point A, en ſorte qne ſes côtés AX, AZ, touchent les angles E ; F, & paſſent en même temps par les points marqués H, K. Je dis que l'angle XAZ ou BAD ſera la cinquiéme partie cherchée de l'angle donné HGK.

Car ayant mené dans le rhombe $ABCD$ la diagonale AC, prolongée indéfiniment vers Y; elle paſſera par le point G, puiſque les angles ECY, FCY, étant triples des angles égaux BAC, DAC, ſeront auſſi égaux entr'eux. Or dans le triangle EGA, l'angle externe HEG, qui vaut les deux internes oppoſés BAC, EGA, ou ECY (à cauſe du triangle iſoſcelle CEG) ſera quadruple de l'angle BAC. Et partant dans le triangle AHG, l'angle externe HGY, qui vaut les deux internes oppoſés BAC, GHA ou GEH (à cauſe du triangle iſoſcelle EGH) ſera le quintuple de l'angle BAC. On prouvera de même que l'angle KGY ſera quintuple de l'angle DAC, d'où il eſt évident que l'angle entier HGK ſera quintuple de l'angle entier BAD ou XAZ.

S'il falloit diviſer un angle donné en ſept parties égales, il n'y aura qu'à joindre aux deux rhombes precedens, un troiſiéme rhombe égal & conſtruit de la même maniere ; & ainſi de ſuite de deux en deux. Car la pratique & la démonſtration ſe fera toûjours de la même maniere.

EXEMPLE.

480. TROUVER entre deux lignes données a & b, autant de moyennes proportionnelles qu'on voudra.

Soit l'inconnuë x la premiere des moyennes proportionnelles qu'il eſt queſtion de trouver ; & l'on aura la progreſſion geometrique continuë a, x, $\frac{xx}{a}$, $\frac{x^3}{aa}$, $\frac{x^4}{a^3}$, $\frac{x^5}{a^4}$ &c, de laquelle on prendra le terme dont le quantiéme ſurpaſſe de 2 le nombre donné des moyennes proportionnelles, & l'égalant à la donnée b on formera une égalité, dont la reſolution fournira la valeur de l'inconnuë x qui eſt la premiere des moyennes proportionnelles que l'on cherche.

Qu'il faille, par exemple, trouver deux moyennes proportionnelles. On prendra dans la progreſſion geometrique le

quatriémè terme $\frac{x^3}{aa}$, qui étant égalé à la ligne b, donne $x^3 = aab$; & de même si l'on demande quatre moyennes proportionnelles, l'on aura $x^5 = a^4 b$. D'où il est facile de voir que si n marque en general le nombre des moyennes proportionnelles qu'il faut trouver entre les données a & b, on aura $x^{n+1} = a^n b$ pour l'égalité generale qu'il faut resoudre. Or cela posé.

Soit 1°. $x^{17} = a^{16} b$ qui sert à trouver seize moyennes proportionnelles. Je multiplie les deux membres de cette égalité par x^3, afin d'avoir $x^{20} = a^{16} bx^3$, dont la plus haute dimension 20 est le produit des deux nombres 4 & 5 qui se suivent immédiatement. Je prends l'équation $x^5 = a^4 y$; ce qui donne en élevant chaque membre à la puissance quatriéme $x^{20} = a^{16} y^4 = a^{16} bx^3$, d'où je tire une autre équation $y^4 = bx^3$, dont le lieu étant construit separément, donnera par son intersection avec celui de la supposée $x^5 = a^4 y$, la valeur de l'inconnuë x. Ou bien je prends l'équation $x^4 = a^3 y$, dont j'éleve chaque membre à la quatriéme puissance; & les multipliant ensuite par x, j'ai $x^{17} = a^{12} y^4 x = a^{16} b$, d'où je tire $y^4 x = a^4 b$, dont le lieu étant construit separément avec celui de l'équation $x^4 = a^3 y$, donnera par son interſection la valeur cherchée de l'inconnuë x.

Soit 2°. $x^{31} = a^{30} b$ qui sert à trouver trente moyennes proportionnelles. Je multiplie de part & d'autre par x^5, afin d'avoir $x^{36} = a^{30} bx^5$; dont la plus haute dimension 36 est le quarré de 6: c'est pourquoi faisant $x^6 = a^5 y$, & prenant de part & d'autre la sixiéme puissance, j'ai $x^{36} = a^{30} y^6 = a^{30} by^5$, d'où je tire $x^6 = by^5$, dont le lieu étant construit separément avec celui de l'équation que j'ai prise d'abord $x^6 = a^5 y$, donnera par son interſection la valeur de l'inconnuë x. Ou bien ayant pris comme ci-dessus l'équation $x^6 = a^5 y$, je l'éleve à la cinquiéme puissance, & la multipliant ensuite par x, j'ai $x^{31} = a^{25} y^5 x = a^{30} b$, ce qui donne $y^5 x = a^5 b$. D'où l'on voit que le lieu de l'équation $x^6 = a^5 y$, étant construit separément avec le lieu de l'autre équation $y^5 x = a^5 b$, donnera la resolution de l'égalité proposée $x^{31} = a^{30} b$; de sorte que l'on peut choisir entre les deux lieux $y^6 x = bx^5$, ou $y^5 x = a^5 b$, celui qu'on jugera le plus simple. Il en est ainsi de tous les autres exemples qu'on peut se former à plaisir.

Il eſt à remarquer que ſi la dimenſion de l'inconnuë x n'étoit pas un nombre premier, l'égalité propoſée ſe pourroit toûjours abaiſſer. Si l'on avoit, par exemple; $x^9 = a^8 b$, qui ſert à trouver huit moyennes proportionnelles; on trouveroit en extrayant de part & d'autre la racine cubique $x^3 = \sqrt[3]{a^8 b}$. Or afin que le nombre $a^8 b$ ſoit un cube, il n'y a qu'à trouver une ligne z dont le cube $z^3 = aab$, ou ce qui eſt la même choſe de trouver entre a & b deux moyennes proportionnelles; car mettant à la place de aab ſa valeur z^3, on aura $x^9 = a^6 z^3$ ou $x^3 = a^2 z$, de ſorte qu'en reſolvant ces deux égalités $z^3 = aab$, & enſuite $x^3 = aaz$ qui ne ſont que du troiſiéme degré, on trouvera la valeur de l'inconnuë x, qui eſt la premiere des huit moyennes proportionnelles entre les extrêmes a & b. De même ſi l'on avoit $x^{14} = a^{13} b$ qui ſert a trouver treize moyennes proportionnelles, il viendroit en extrayant de part & d'autre la racine quarrée $x^7 = \sqrt{a^{13} b}$. Or afin que $\sqrt{a^{13} b}$ ſoit un quarré, il faut trouver une ligne z dont le quarré $zz = ab$; car ſubſtituant à la place de ab, le quarré zz dans l'égalité propoſée, on aura $x^{14} = a^{12} zz$ ou $x^7 = a^6 z$, c'eſt pourquoi il n'y aura qu'à reſoudre d'abord l'égalité du ſecond degré $zz = ab$, & enſuite celle du ſeptiéme $x^7 = a^6 z$.

On doit encore remarquer que ces ſortes d'égalités qui ſervent à trouver des moyennes proportionnelles, & dont la dimenſion de l'inconnuë eſt un nombre premier, n'ont qu'une racine réelle & toutes les autres imaginaires; dont la raiſon eſt qu'il ne peut y avoir qu'une ſeule ligne qui ſoit la premiere des moyennes proportionnelles cherchées.

REMARQUE.

481. ON peut reſoudre le Problême precedent par le moyen d'un inſtrument geometrique dont la conſtruction eſt telle. Soient deux lignes indéfinies XY, YZ, mobiles autour du point Y, en ſorte qu'elles ſe puiſſent ouvrir & fermer. Soit attachée au point quelconque fixe B du côté XY, une perpendiculaire indéfinie BC ſur ce côté, laquelle chaſſe devant elle (pendant que l'angle XYZ s'ouvre) par le point C où elle rencontre l'autre côté YZ, la perpendiculaire indéfinie CD ſur ce dernier côté; qui chaſſe de même par le point D où elle rencon- FIG.CCLXXXV.

tre le côté YX, la perpendiculaire indéfinie DE; qui chasse encore de même par le point E où elle rencontre le côté YZ, la perpendiculaire indéfinie EF; qui chassera par le point F où elle rencontre le côté YX, la perpendiculaire FG; qui chasse encore par le point G où elle rencontre le côté YZ, la perpendiculaire GH; & ainsi de suite à l'infini, en augmentant autant que l'on voudra le nombre des perpendiculaires sur les côtés YX & YZ. Cela fait, soit proposé, par exemple, de trouver quatre moyennes proportionnelles entre les deux lignes droites données a & b. Ayant pris sur le côté YZ la partie YG quatriéme proportionnelle aux trois lignes a, b, YB, on ouvrira le côté XY de l'Instrument, jusqu'à ce que la cinquiéme perpendiculaire FG (parce qu'il est question de trouver quatre moyennes proportionnelles) passe par le point G; & alors les lignes YC, YD, YE, YF, seront les quatre moyennes proportionnelles entre les extrêmes YB, YG; & partant la quatriéme proportionnelle aux trois lignes YB, YC, a sera la premiere des quatre moyennes proportionnelles demandées.

Car les triangles rectangles YBC, YCD, YDE, YEF, YFG, étant tous semblables; leurs côtés YB, YC, YD, YE, YF, YG, seront en progression geometrique continuë. Donc &c.

Il est clair que pendant que l'angle XYZ s'ouvre de plus en plus, le point B décrit un arc de cercle AB; & que les intersections continuelles D, F, H, des perpendiculaires CD, EF, GH, sur le côté YZ, avec l'autre côté YX, décrivent des lignes courbes AD, AF, AH, qui servent à trouver autant de moyennes proportionnelles qu'on voudra. Car si l'on décrit, par exemple, du diametre YE un demi-cercle, il coupera la courbe AD en un point D, tel que YD est la seconde des deux moyennes proportionnelles, entre les extrêmes YB ou YA & YE; & de même si l'on décrit un demi cercle du diametre YG, il coupera la ligne courbe AF en un point F, tel que YF est la derniere des quatre moyennes proportionnelles entre YA & YG &c. Sur quoi il est à propos de remarquer que la ligne courbe AD est du quatriéme degré; la ligne courbe AF du huitiéme; la courbe AH du seiziéme, &c; ce que je prouve ainsi.

Soient 1°. les inconnuës & indéterminées $YC = x$, $CD = y$, $YD = z$, & la connuë YA ou $YB = a$, on aura à cause des triangles rectangles semblables YCD, YBC,

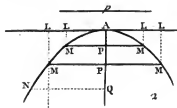
cette équation $YB\ (a) = \frac{xx}{z}$, & à cauſe du triangle rectangle YCD cette autre $yy + xx = zz$, dans laquelle mettant à la place de z ſa valeur $\frac{xx}{a}$ trouvée par le moyen de la premiere équation, il vient $aayy = x^4 - aaxx$; ce qui fait voir que la courbe AD eſt un lieu du quatriéme degré. Soient 2°. les inconnuës & indéterminées $YE = x$, $EF = y$, $YF = z$, & la connuë YA ou $YB = a$; on aura à cauſe des triangles rectangles ſemblables YFE, YED, YDC, YCB, cette équation $YB\ (a) = \frac{x^4}{z^3}$, & à cauſe du triangle rectangle YEF cette autre $yy + xx = zz$, dans laquelle faiſant évanoüir l'inconnuë z par le moyen de la premiere équation, & ôtant les incommenſurables, on trouve $aay^6 + 3aaxxy^4 + 3aax^4yy + aax^6 = x^8$; d'où l'on voit que la courbe AF eſt un lieu du huitiéme degré. On prouvera de même que la courbe AH eſt un lieu du ſeizieme degré, &c.

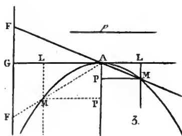
Maintenant puiſque ſelon l'exemple on peut trouver deux moyennes proportionnelles, en n'employant que deux lignes du ſecond degré; quatre moyennes proportionnelles, en ſe ſervant du lieu du ſecond degré, & d'un autre du troiſiéme; au lieu qu'ici il faut dans le premier cas un lieu du quatriéme, qui eſt la ligne AD; & un lieu du ſecond qui eſt le cercle YDE; & dans le ſecond un lieu du huitiéme, ſçavoir, la ligne courbe AF, & un lieu du ſecond, ſçavoir le cercle YFG : il s'enſuit que ces lignes courbes AD, AF, AH, ſont beaucoup trop compoſées pour reſoudre ce Problême. Cependant la facilité de la conſtruction & de la demonſtration, récompenſe en quelque ſorte ce défaut.

FIN.

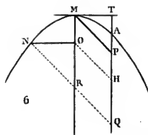


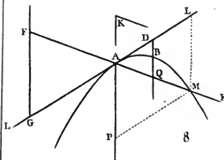
Planche I.re

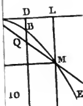


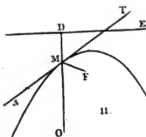


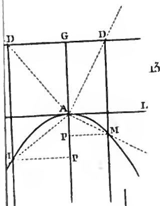
Γ
A
F
P
H
Q

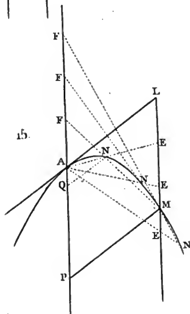








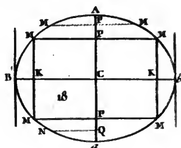


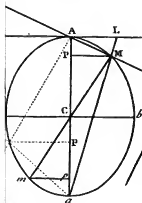


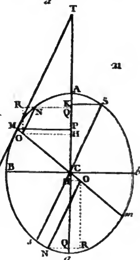
2.

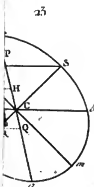


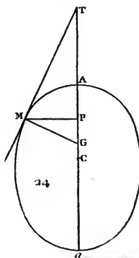

p


A
M
P
M
M
P
M
B
K
C
K
b
18
P
M
M
N
Q
a


A
L
P
M
C
b
P
m
p
a


T
21
A
R
N
K
Q
S
M
P
H
O
B
C
b
O
m
s
N
Q
R
a


23
P
S
H
C
b
Q
m
a


T
A
M
P
G
C
24
a

27.

29.

30

35

34

36

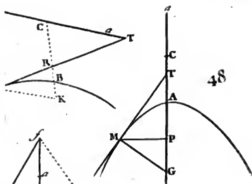
58

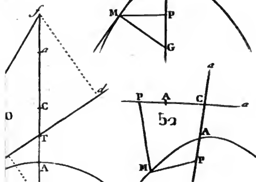
40

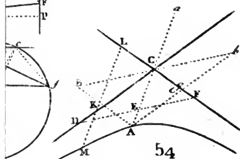
42

44

45


C
a
T
R
B
K
a
C
T
48
A
M
P
G


f
a
d
C
T
A
F
P
a
P
A
C
a
52
A
M
P


a
L
C
b
B
K
E
F
D
A
M
54

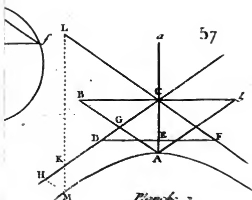
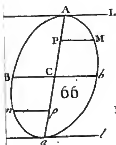
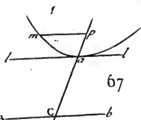

L
a
57
C
B
b
G
D
E
F
K
A
H
M

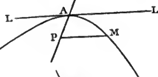
Planche 7.

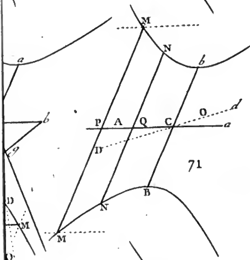

59


61


A
L
P
M
B
C
b
66
m
p
a
l


m
p
l
a
l
67


B
C
b
L
A
L
P
M


M
N
b
P
A
Q
C
O
d
a
D
71
B
N
M

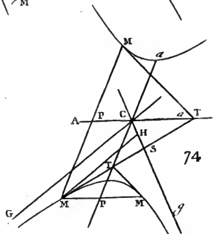
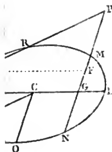
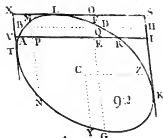
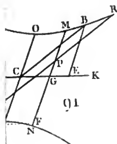
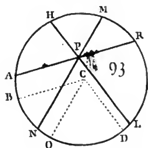

M
a
A
P
C
a
T
H
S
74
T
G
M
P
M
g

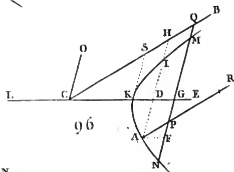
Planche 10.

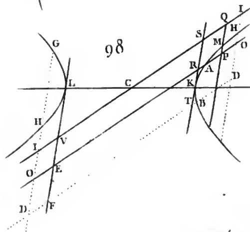

P
R
M
F
C
G
L
N
O


X
L
O
S
B
F
D
H
V
A
P
Q
E
R
I
T
C
Z
K
N
92
Y
G

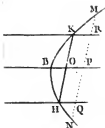

R
O
M
B
C
P
E
K
G
91
F
N

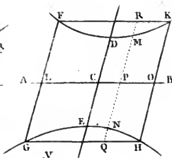

H
M
R
P
A
C
93
B
N
L
O
D

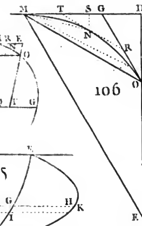

Q
B
H
M
O
S
I
R
L
C
K
D
G
E
96
P
A
F
N

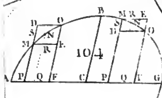

Q
I
S
H
M
O
G
98
R
P
A
D
L
C
K
T
B
H
V
I
O
E
D
F

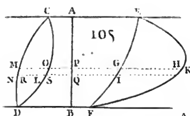
Planche

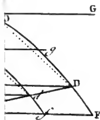

100
M
K
R
B
O
P
H
Q
N

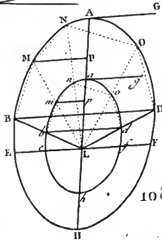

101
F
R
K
D
M
A
L
C
P
O
B
E
N
G
Q
H

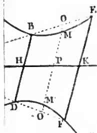

V
T
S
M
T
S
G
D
N
R
F
O
106
E

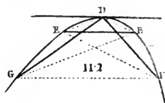

T
K
B
D
O
S
N
M
R
E
104
A
P
Q
F
C
G

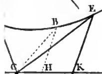

C
A
E
105
M
O
P
G
H
K
N
R
L
S
Q
I
D
B
F

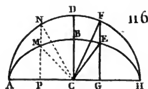

109
G
D
g
d
F
f


N
A
G
O
M
P
a
n
g
o
m
p
B
D
b
d
E
c
L
f
F
h
108
H

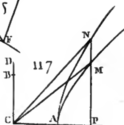

B
O
E
M
H
P
K
D
M
O
F

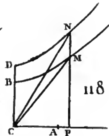

D
E
G
112

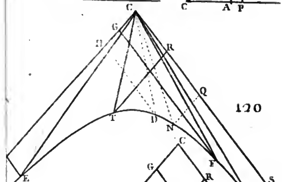

B
E
G
H
K

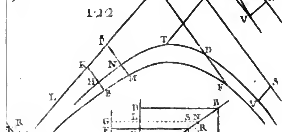

D
F
116
N
M
B
E
A
P
C
G
H

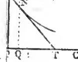

115
D
F

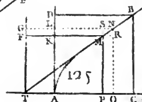

N
D
B
117
M
C
A
P

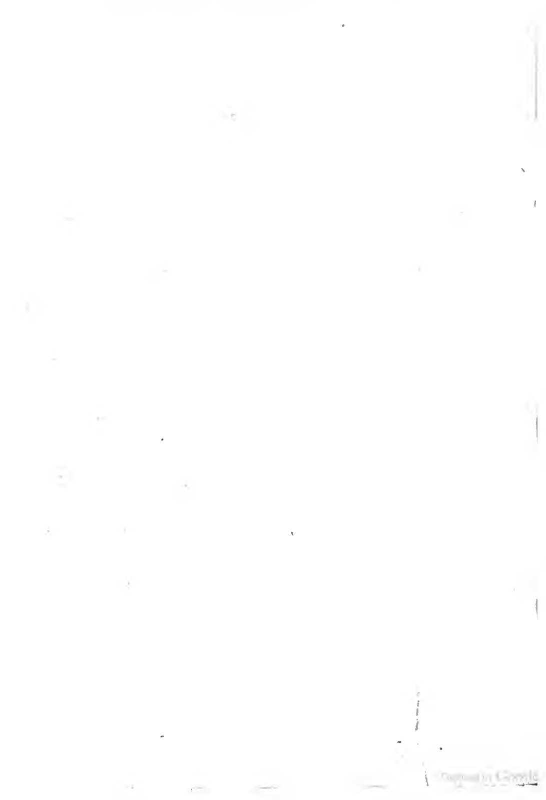

N
D
M
B
118
C
A
P


C
G
H
R
Q
120
T
D
N
F
E
S
V


C
G
R
122
T
D
K
N
H
M
L
F
S
V


R
N
Q
T
C


B
D
G
L
S
N
F
K
M
R
125
T
A
P
Q
C

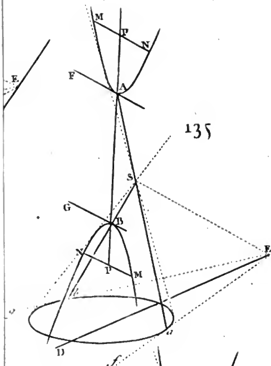


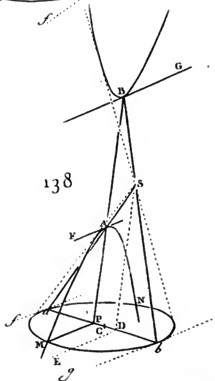
27

128

130

132


M
P
N
F
A
135
S
G
B
N
P
M
E
D
a
f


B
G
138
S
A
F
N
f
a
P
C
D
M
E
b
g

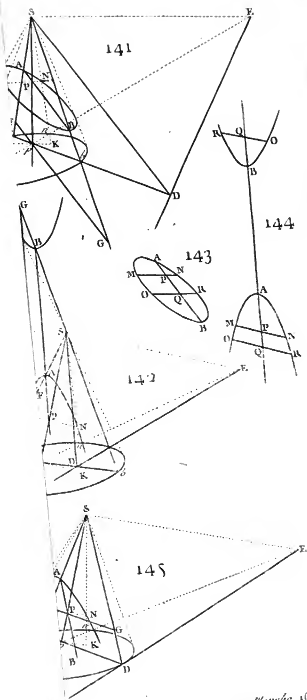
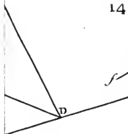
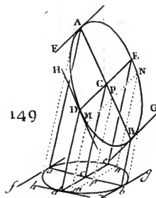
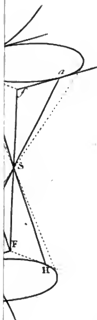
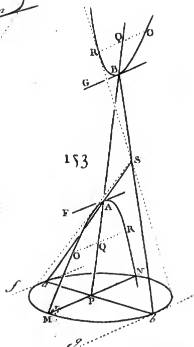


Planche 16.


148
D


149
A
E
E
N
H
C
P
G
D
M
B


a
S
F
H


Q
O
R
B
G
153
S
F
A
R
Q
O
N
P
M
b

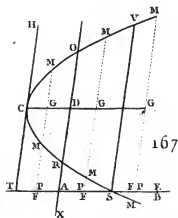
157

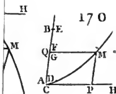
159

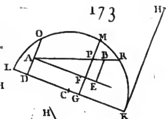
156

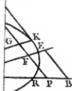
166

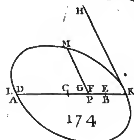
162



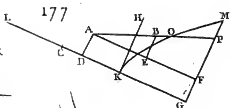

H
M
R
170
B E
Q F
G
M
A D
C
P
H

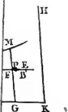

173
H
O
M
A
P
B
R
L
D
F
E
C
G
K

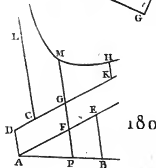

G
K
E
F
R
P
B

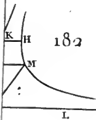

H
M
L D
A
C
G F
P
E
B
K
174

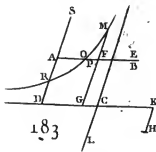

H
K
F
E
P
B


L
177
H
A
B
O
M
P
C
D
E
K
F
G

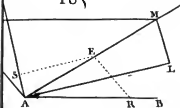

H
M
P E
F B
G
K

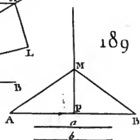

L
M
H
K
G
C
E
D
F
180
A
P
B

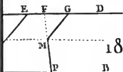

K
H
M
L

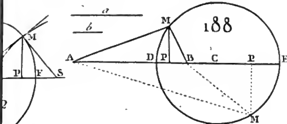

S
M
A
O
F
E
P
B
R
D
G
C
K
H
183
L

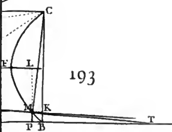
182

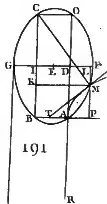












M

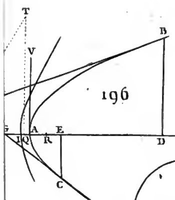
)0

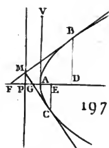
O

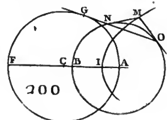
P

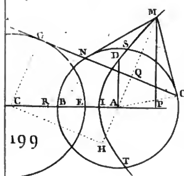
H

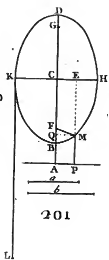
Planche

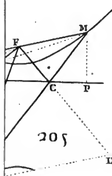

T
V
B
196
G
A
E
I
Q
R
D
C


V
B
M
A
D
F
P
G
E
197
C


G
N
M
O
F
C
B
I
A
200


M
G
N
S
D
Q
O
C
R
B
E
I
A
P
199
H
T


D
G
K
C
E
H
F
Q
M
B
A
P
a
b
201
L


F
M
C
P
205
D

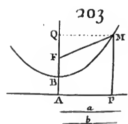
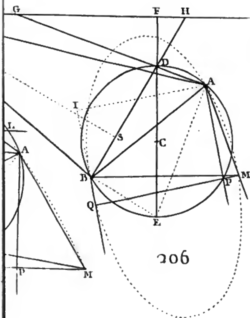
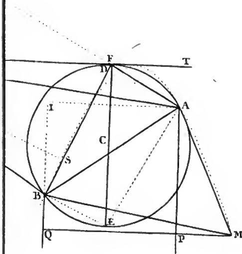
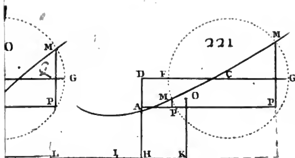
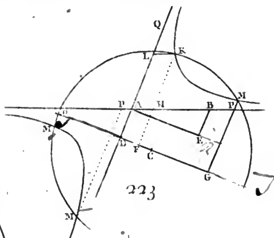

203
Q
M
F
B
A
P
a
b

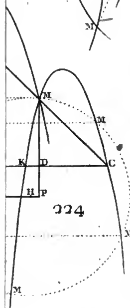
Planche 21.


G
F
H
D
A
I
S
C
B
P
M
Q
E
L
A
P
M
206


F
T
D
I
A
C
S
B
E
Q
P
M


221
M
D
F
C
G
M
O
A
P
P
L
I
H
K


Q
L
K
M
P
A
H
B
P
M
D
F
C
E
G
223
M


M
M
K
D
C
H
P
224
M
M

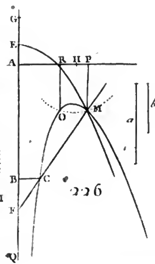
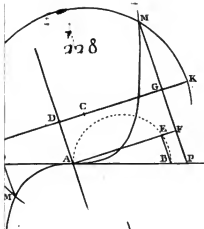
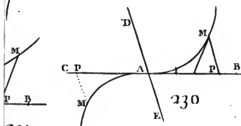
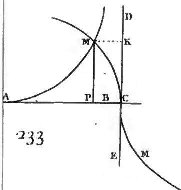
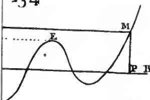

G
E
A
R
H
P
O
M
a
b
B
C
F
226
Q

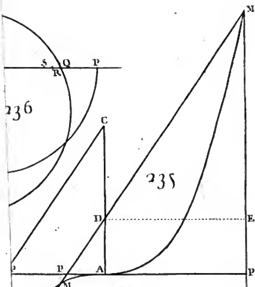
Planche 24.

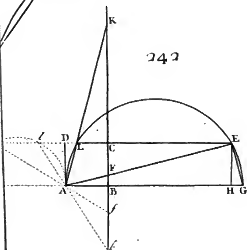

228
M
K
G
C
D
E
F
A
B
P
M

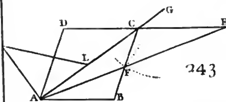

D
M
C P
A
P
B
M
230
E
M
P B
231

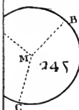

D
M
K
A
P
B
C
233
E
M

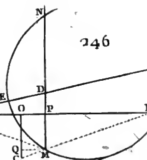

234
M
E
P B


M
S
Q
P
R
236
C
235
D
E
P
P
A
P
M

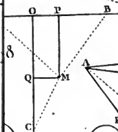

K
242
D
L
C
E
F
A
B
H G

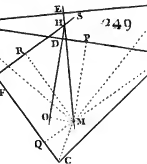

G
D
C
E
L
F
243
A
B

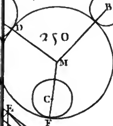


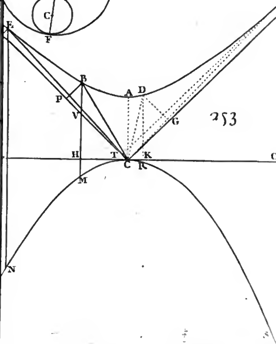




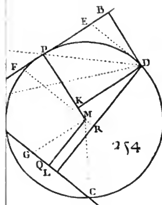


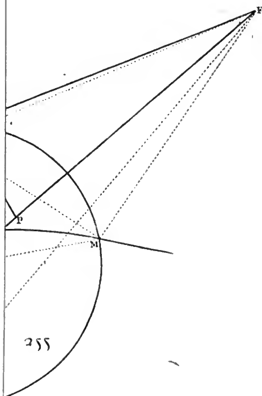




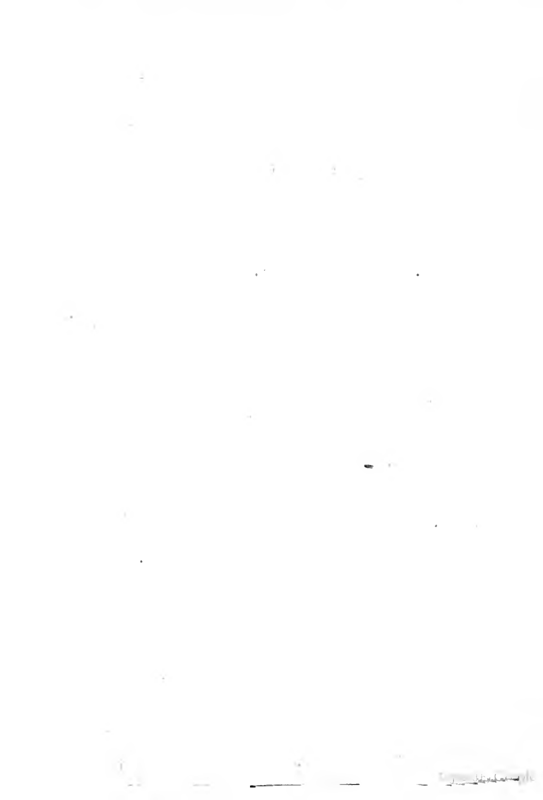


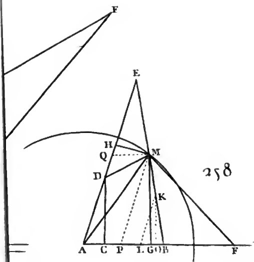
SiΩ = KHE
SiPS = HEλ

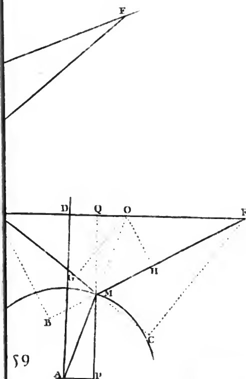




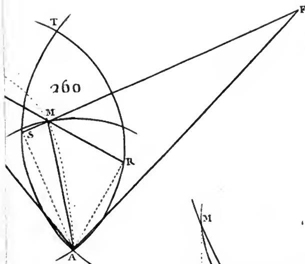
Planche

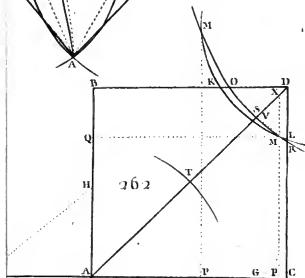


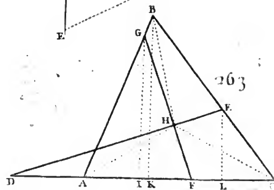

F
E
H
Q
M
D
K
258
A C P L G O B F

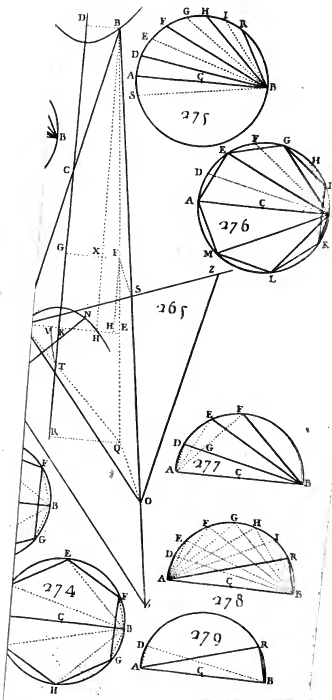

D Q O F
G
H
M
B
C
59
A P

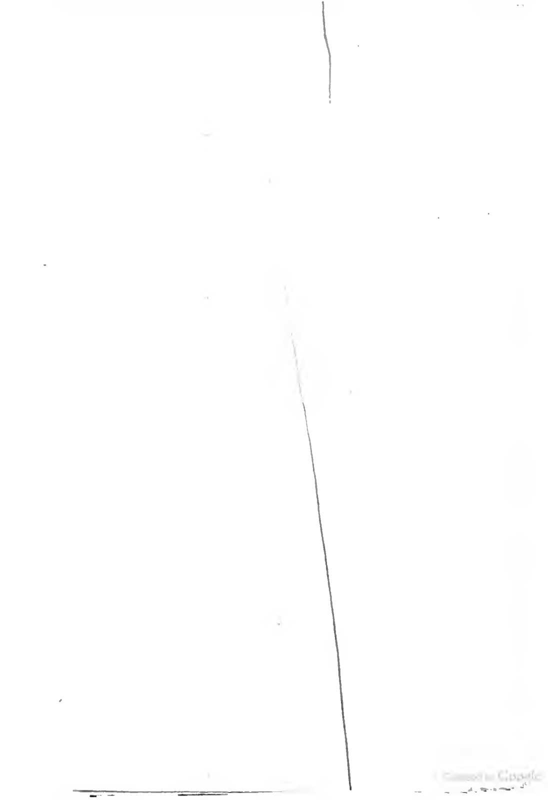


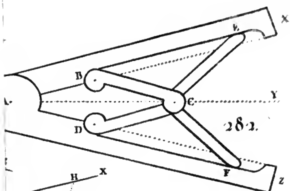

T
F
260
M
S
R
A

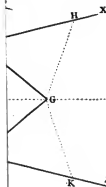

M
B
K
O
D
X
S
V
Q
L
M
R
T
H
262
A
P
G
P
C
E

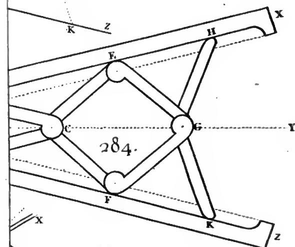

B
G
263
E
H
D
A
I
K
F
L

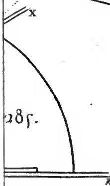

275
276
265
277
278
279
274




X
B
A
Y
C
282.
D
F
Z


H
X
G
K
Z


X
H
E
C
G
Y
284.
F
K
Z


X
285.

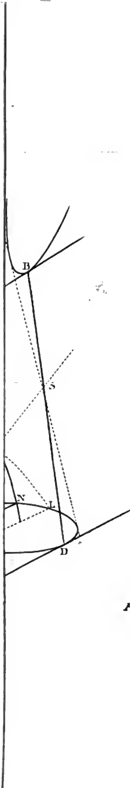


Planche 34.

